非线性科学丛书

# 哈密顿系统中的有序与无序运动

程崇庆　孙义燧　编著

上海科技教育出版社

本书出版由上海市新闻出版局
学术著作出版基金资助

非线性科学丛书

# 哈密顿系统中的有序与无序运动

程崇庆　孙义燧　编著
朱照宣　顾　雁　审阅

上海科技教育出版社

# 内容提要

本书主要研究哈密顿系统的动力行为．重点放在KAM理论和关于马瑟集的理论．众所周知，KAM理论的建立，是本世纪数学的一个重大突破．KAM理论对物理、力学有着深远的影响．本书介绍了什么是KAM理论、证明方法的基本框架、各式各样的推广、最新研究进展以及一些尚未解决的问题．本书可供理工科大学教师、高年级学生、研究生、博士后阅读，也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考．

本书由朱照宣、顾雁审阅．

非线性科学丛书

哈密顿系统中的有序与无序运动

程崇庆　孙义燧　编著

朱照宣　顾　雁　审阅

上海科技教育出版社出版发行

（上海市冠生园路393号　邮政编码：200233）

各地新华书店经销　商务印书馆上海印刷厂印刷

开本850×1168　1/32　印张5.25　字数134,000

1996年1月第1版　1996年1月第1次印刷

印数1—3,200本

ISBN 7-5428-1243-2/O·107　定价：（精装本）10.10元

Advanced Series in Nonlinear Science

# Regular and Stochastic Motions in Hamiltonian Systems

Chong-Qing Cheng & Yi-Sui Sun

Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210008, China
Department of Astronomy, Nanjng University, Nanjing 210008, China

Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, SHANGHAI, 1996

# 非线性科学丛书编辑委员会

非线性科学丛书

# 出版说明

现代自然科学和技术的发展，正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法."数、理、化、天、地、生"这些曾经以纵向发展为主的基础学科，与日新月异的新技术相结合，使用数值、解析和图形并举的计算机方法，推出了横跨多种学科门类的新兴领域. 这种发展的一个重要特征，可以概括为"非"字当头，即出现了以"非"字起首而命名的一系列新方向和新领域. 其中，非线性科学占有极其重要的位置. 这决非人们"想入非非"，而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升.

曾几何时，非线性还被人们当作个性极强，无从逾越的难题. 每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法，运用新颖的技巧. 诚然，力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程，物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型. 不过，这些都曾是稀如凤毛麟角的"手工艺"珍品，人们还没有悟出它们的普遍启示，也没有看到它们之间的内在联系.

20世纪60年代中期，事情从非线性现象的两个极端同时发生变化. 一方面，描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算，揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质. 这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径，即所谓"反散射"方法. 反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念，反映了这类方程内秉的对称和保守性质. 到了80年代，反散射方法推广到量子问题，发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系.

60 年代初期还证明了关于弱不可积保守系统普遍性质的 KAM 定理. 于是，非线性问题的可积的极端便清楚勾划出来，成为一个广泛的研究领域. 虽然这里的大多数进展还只限于时空维数较低的系统，但它对非线性科学发展的促进作用是不可估量的.

另一方面，在“不可积”的极端，对 KAM 定理条件的“反面文章”，揭示了保守力学系统中随机性运动的普遍性，而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例. 这些研究迅速地融成一片，一些早年被认为是病态的特例也在新的观点下重新认识. 原来不含有任何外来随机因素的完全确定论的数学模型或物理系统，其长时间行为可能对初值的细微变化十分敏感，同投掷骰子一样地随机和不可预测. 然而，混沌不是无序，它可能包含着丰富的内部结构.

同时，由于计算科学特别是图形技术的长足进步，人们得以理解和模拟出许多过去无从下手研究的复杂现象. 从随机与结构共存的湍流图象，到自然界中各种图样花纹的选择与生长，以及生物形态的发生过程，都开始展现出其内在的规律. 如果说，混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为，则这些复杂系统要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程. 标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术在这里起着重要作用.

在由上述种种方面汇成的非线性科学洪流中，许多非线性数学中早已成熟的概念和方法开始向其他学科扩散，同时也提出了新的深刻的数学问题. 物理学中关于对称和守恒，对称破缺，相变和重正化群的思想，也在日益增多的新领域中找到应用. “非线性”一词曾经是数学中用以区别于“线性”问题的术语，非线性科学正在成为跨学科的研究前沿. 各门传统学科中都有自己的非线性篇章，非线性科学却不是这些篇章的总和. 非线性科学揭示各种非线性现象的共性，发展处理它们的普适方法.

这样迅猛发展的跨学科领域，很难设想用少数专著加以概括，

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步．于是，有了动员在前沿工作的教学和研究人员，以集体力量撰写一套“非线性科学丛书”的想法．在上海科技教育出版社的大力支持下，这一计划得以付诸实现．

这套“非线性科学丛书”不是高级科普，也不是大块专著．它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展，帮助大学高年级学生、研究生、博士后人员和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域，同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人员更新知识提供自学教材．非线性科学的全貌将由整套丛书刻划，每册努力讲清一个主题，一个侧面，而不求面面俱到，以免失之过泛．在写作风格上，作者们将努力深入浅出，图文并茂，文献丰富；力求有实质内容，无空洞议论，以真刀真枪脚踏实地武装读者．从读者方面，自然要求具备理工科大学本科的数学基础，和读书时自己主动思索与推导的习惯．

“非线性科学丛书”的成功，取决于读者和作者的支持．我们衷心欢迎批评和建议．

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

# 前　言

介绍有关哈密顿(W. R. Hamilton)动力系统理论的书，目前已有不少．作者并不打算在本书中全面介绍这方面的理论．本书的重点是介绍KAM 理论．若要以运动的形态划分，这部分所涉及的当属规则运动范畴．

作为20世纪最重要的数学成就之一，KAM 理论对其它学科，如物理学、天文学和力学的影响是深远的．例如，运动稳定性一直是动力学的一个重要问题．李雅普诺夫(A.M.Ляпунов)运动稳定性理论主要是针对耗散系统的．由于哈密顿系统具有的特征值一正一负或成对出现，故此系统具有运动稳定性的必要条件是所有特征根为纯虚数．这恰恰是李雅普诺夫稳定性理论中难以处理的临界情形．太阳系中特罗央(Trojan)小行星群，希腊(Greek)小行星群位于与太阳、木星成等边三角形的顶点，它正好是太阳、木星、小行星限制性三体问题运动方程的平衡解位置．关于这种小行星群的运动稳定性，涉及到哈密顿系统平衡解的稳定性问题．由于李雅普诺夫运动稳定性理论不适用于这类问题，而关于哈密顿系统的稳定性的结果甚少，致使这一问题长期不能得到解决，直到KAM 理论的建立．

对于 $n$ 个自由度的可积哈密顿系统，哈密顿函数仅依赖于作用变量，独立于角变量：$H=H(I)$；其运动方程为

$$\dot{I}=0,\quad \dot{\varphi}=\frac{\partial H}{\partial I}=\omega(I);\qquad (I,\varphi)\in \mathbf{R}^{2n}$$

所有的运动均为周期或拟周期运动，始终在不变环面上．当系统仅具有两个自由度时，由于有能量积分，运动始终被限制在三维流形上．二维环面将三维流形分成互不连通的两部分．当自由度数不少于3时，系统不再具有这种性质．可惜的是可积哈密顿系统

非常稀少，实际问题中大量的是受扰可积哈密顿系统，相应的函数可以写成 $H=H_0(I)+\varepsilon P(I, \varphi)$，其中 $H_0$ 为主要部分，$\varepsilon P$ 为扰动项. 对于一般系统，有例子说明即使当 $\varepsilon$ 非常小时，也会引起运动性质的巨大变化. 令人吃惊的是，对于这种类型的哈密顿系统，KAM 理论证明大部分不变环面仍然存在，只是有微小变形，但是破裂的环面也构成稠密集. 以前人们曾试图通过一系列变换使得 $H=H_0+\varepsilon P$ 在一个开集上越来越逼近一个可积哈密顿函数，但由于小分母的存在，导致变换函数的级数不收敛. 如今，由 KAM 理论给出的几何图象我们不难明了为何这种努力一直不能成功. 这种系统原来就不是在一个开集中可积. 柯尔莫哥洛夫 (А.Н. Колмогоров) 在 1954 年首先提出用牛顿 (I. Newton) 快速迭代法来克服小分母问题，阿诺尔德 (V. I. Arnold) 在 60 年代证明了解析的哈密顿系统的 KAM 理论，而与此同时，莫泽 (J. K. Moser) 运用纳什-莫泽技巧，证明了保面积扭转映射的 KAM 理论，系统无需解析，只要有 333 阶可微性即可.

KAM 理论有着重要的理论价值. 如直接否定了哈密顿系统的遍历性猜测，解决了长期悬而未决的特罗央小行星群运动稳定性问题等. 不仅如此，作为一种数学工具，证明 KAM 理论的方法在常、偏微分方程理论中也得到广泛应用. 难得的是，作为一门理论，它并不涉及过多的抽象数学理论. 要掌握它，除去哈密顿系统的最基本知识外，只需要扎实的数学分析基本功和耐心. 这一理论的证明由于包含精细的估计而较长，目前国内外尚无一书较完整地介绍这方面的研究成果. 本书的主要目的是将这一理论介绍给读者，以便使读者了解这一方面的基本理论、最新进展以及尚待解决的问题. 需要指出，作者只试图给出理论证明的思路，并不给出严格证明. 若要给出严格证明，恐非本书的篇幅所能容纳.

本书共分三章. 第 1 章简单介绍哈密顿动力系统的最基本知识；第 2 章介绍 KAM 理论，这是本书的重点；第 3 章介绍马瑟 (J.

Mather)集，随机层以及关于阿诺尔德扩散的图象. 作为 KAM 环面破裂后的残余，马瑟集上的运动还是属于有序运动范畴，这方面的结果有严格数学理论. 关于无序(复杂)运动的描述，目前还有相当一部分停留在数值研究，辅之以现有理论而加以合理想象而得到的图象上. 要得到严格的理论结果还需要长期艰苦的研究.

由于作者学识有限，加之成书仓促，内容取舍恐有不妥之处，错误亦在所难免. 至盼读者不吝指教，以便进一步修改.

作　者

1995 年 1 月于南京大学

## Abstract

This book is concerned mainly with the dynamical behavior of Hamiltonian systems. The emphases are put on the subjects such as the KAM theory and the theory of Mather set. It is well known thar the KAM theory is the breakthrongh of mathematics in this century, it has profound influence on physics and mechanics. The authors introduce reader the formulation of this theory, the sketch of its proof, its various extensions, the newest developments and some open problems.

# 目　录

# Contents

# 第1章

# 哈密顿动力系统

## §1 哈密顿方程与拉格朗日方程

大量的物理、力学与天文问题的数学模型是由哈密顿方程或拉格朗日(J. L. Lagrange)方程表示的. 对于哈密顿方程, 系统的变量一般是由$n$对共轭变量表示, $(p, q)=(p_1, p_2, \cdots, p_n, q_1, q_2, \cdots, q_n)$. $q\in M$一般称为系统的广义坐标, $p\in \mathbb{R}^n$称为广义动量, $M$是一个$n$维流形, 一般称为系统的构形空间. 对于$n$质点系统, 如果它们服从牛顿运动定律, 而且未受到任何约束, 则其构形空间是$\mathbb{R}^{3n}$(每个质点有3个自由度). 而对一个数学双摆而言, 第一个质点的运动是约束在圆周上的, 当此质点的位置确定以后第二个质点的位置也被约束在圆周上, 因此这个数学双摆系统的构形空间是$\mathbb{T}^2$, 一个二维环面, 这显然是一个紧流形. 对于拉格朗日系统, 系统的状态是由广义坐标和广义速度来表示的, $(q, \dot{q})=(q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n)$, 这里$\dot{q}_i$是表示$q_i$关于时间的导数. 从微分拓扑的观点来看, 哈密顿系统的相空间是流形$M$的余切丛, 而拉格朗日系统的相空间是$M$的切丛. 例如对于数学双摆, 两个质点的运动速度显然是$\mathbb{T}^2$上的切向量, 而广义动量$(p_1, p_2)$则是$T(\mathbb{T}^2)$上的一个泛函, 它作用到一个切向量上我们便得到系统的总能量$E=\frac{1}{2}(p_1\dot{q}_1+p_2\dot{q}_2)=\frac{1}{2}(m_1\dot{q}_1^2+m_2\dot{q}_2^2)$, 因而广义动量自然是余切丛上的量. 如果用拉格朗日方程来表示系统的运动, 它一般可以表示为一个泛函的欧拉(L. Euler)方程, 即系统的

真实运动是这个泛函的临界点

$$\Phi(q)=\int_a^b L(q,\ \dot{q},\ t)dt. \tag{1.1}$$

如果两端点固定，如果 $q=q(t)$ 是 $\Phi(q)$ 的临界点，则 $q(t)$ 满足拉格朗日方程：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0. \tag{1.2}$$

由拉格朗日量可以得到哈密顿量，这由勒让德(A. M. Legendre)变换相联系．定义 $H(p,\ q,\ t)=\langle p,\ \dot{q}\rangle-L(q,\ \dot{q},\ t)$，其中 $\langle\cdot,\ \rangle$ 表示经典意义下的内积，这时 $\dot{q}$ 可以用 $(p,\ q,\ t)$ 来表示．这种关系由

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{1.3}$$

来确定．这种变换确实可行的前提，是(1.3)确实有隐函数解．一个充分条件为 $L$ 是 $\dot{q}$ 的凸函数．这时，$H$ 也是 $p$ 的凸函数．对 $H(p,\ q,\ t)$ 求全微分

$$dH=\frac{\partial H}{\partial p}dp+\frac{\partial H}{\partial q}dq+\frac{\partial H}{\partial t}dt,$$

这自然等于 $\langle p,\ \dot{q}\rangle-L\left(p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$ 的全微分

$$dH=\dot{q}\,dp-\frac{\partial L}{\partial q}dq-\frac{\partial L}{\partial t}dt,$$

因此有 $\quad \dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p},\ \frac{\partial H}{\partial q}=-\frac{\partial L}{\partial q},\ \frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}.$

再利用拉格朗日方程，可得哈密顿方程：

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p},\ \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{1.4}$$

引入记号 $\boldsymbol{x}=(p,\ q)$、$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0 & -\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I} & 0\end{pmatrix}$，式(1.4)可以写成较为简洁的形式

$$\dot{x}=J\nabla_x H,$$

其中$I$为$n$阶单位阵. 对于显含变量$t$的哈密顿函数, 我们可以将相空间从$2n$维扩充成$2n+2$维. 在新的空间中哈密顿方程就是自治方程. 为简单起见, 我们设$H$不显含$t$. 给定这样一个哈密顿量, 我们得到一个向量场$\left(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}\right)$. 设由此向量场确定的哈密顿方程的解在$t\in\mathbf{R}$上都有定义.

**定义1** 相流是一个相空间的单参数变换群:

$$f^t(p(0), q(0))\to(p(t), q(t)),$$

其中$(p(t), q(t))$是方程(1.4)的解.

哈密顿方程确定的相流有着一系列特殊性质, 其中一个重要性质便是保体积.

**定理1**(刘维尔) 哈密顿相流保体积: 对任何区域$D$,

$$\mathrm{meas}(f^tD)=\mathrm{meas}(D).$$

这里meas表示勒贝格(H. L. Lebesgue)测度.

定理1的证明很容易, 待后面明了哈密顿流保持辛结构不变这一性质, 此定理便是简单推论. 刘维尔(J. Liouville)的这一定理有着许多重要应用. 例如在一个哈密顿系统内不可能存在渐近稳定平衡点和渐近稳定极限环. 刘维尔定理还使我们能够应用遍历理论方法研究动力系统. 一个简单的例子便是:

**定理2**(庞加莱回归定理) 设$f$是保体积、1-1对应的连续映射, 并将一个有界区域$D$映到自身: $fD=D$. 于是对$D$中任意一点的任一邻域$u$, 总存在$x\in u$, 在$f$作用下, 它的轨道能够回到$u$内. 即存在$n>0$使得$f^n(x)\in u$.

**证明** 考虑$u$的映象:

$$u, fu, f^2u, \cdots, f^nu, \cdots.$$

所有的象都具有相同的体积. 如果这些象始终不相交, 则$D$的体积无穷大. 因此存在$k\geqslant0$、$l\geqslant0$、$k>l$, 使$f^ku\cap f^lu\neq\varnothing$. 由此可得$f^{k-l}u\cap u\neq\varnothing$. 取$y\in f^{k-l}u\cap u$, 存在$x\in u$, 使$y=f^{k-l}x$, 定理得证.

哈密顿系统的一些特殊性质要用泊松 (S. D. Poisson) 括号来表示. 设 $H$、$F$ 和 $G$ 是 $u\subseteq \mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}$ 上的光滑实值函数, 定义 $F$ 和 $G$ 的泊松括号为

$$\{F,\ G\}=\nabla F^{T}J\nabla G=\left(\frac{\partial F}{\partial q},\ \frac{\partial G}{\partial p}\right)-\left(\frac{\partial G}{\partial p},\ \frac{\partial F}{\partial p}\right).$$

显然, $\{F, G\}$是 $u$ 上的光滑实值函数. 容易验证$\{\cdot,\ \cdot\}$反对称、双线性并满足雅可比(C. G. J. Jacobi)恒等式

$$\{F,\ \{G,\ H\}\}+\{G,\ \{H,\ F\}\}+\{H,\ \{F,\ G\}\}=0.$$

设 $p(t)$、$q(t)$是方程(1.4)的解, 简记 $F(t)=F(p(t), q(t), t)$, 由复合求导法则, 得

$$\frac{d}{dt}F(t)=\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\{F,\ H\}\right)(p(t),\ q(t),\ t). \qquad (1.5)$$

因此
$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}.$$

**定理 3** 设 $F$、$G$ 和 $H$ 如上定义, 并且不显含 $t$, 那么

(i) $F$ 是(1.4)的首次积分当且仅当$\{F, H\}=0$;

(ii) $H$ 是(1.4)的积分;

(iii) 如果 $F$ 与 $G$ 都是(1.4)的积分, 那么$\{F, G\}$也是;

(iv) $\{F, H\}$是 $F$ 沿着(1.4)的解的关于 $t$ 的变化率.

**证明** (i)直接由定义与(1.5)得到; (ii)由 i 得到; 利用雅可比恒等式可得 iii 而从(1.5)可得 iv.

在自治情况下, $H$ 作为一个函数所具有的临界点显然是系统(1.4)的平衡点.

**定理 4** 如果 $\xi$ 是 $H$ 的局部极大或极小点, 则 $\xi$ 在李雅普诺夫意义下是稳定的.

**证明** 不失一般性, 设 $H(0)=0$, 0 是 $H$ 的极小值. 这时存在 $\eta>0$, 使 $H(x)$在 $0<\|x\|\leqslant\eta$ 上取正值. 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\mathscr{K}=\min\{\varepsilon,\ \eta\}$, $M=\min\{H(x),\ \|x\|=\mathscr{R}\}$. 既然 $H(0)=0$, 并且 $H$ 连续, 存在 $\delta>0$ 使得当 $\|x\|<\delta$ 时 $H(x)<M$. 如果 $\|x_0\|<\delta$, 那么对所有 $t$, $H(x(t,\ x_0))<M$, 因而有 $\|x(t,\ x_0)|<\mathscr{R}\leqslant\varepsilon$. 如若

不然, 存在 $t'\in\mathbf{R}$ 使得 $\|x(t', x_0)\|=\mathscr{R}$, 但这时 $H(x(t', x_0))>M$ 矛盾.

为了研究哈密顿动力系统, 我们要借助于辛流形、辛几何中一系列概念、性质. 因此, 在下面的几节中, 我们将简单介绍一下这方面的初步知识.

## §2 辛向量空间

一个向量空间 $V$ 上的双线性形式是一个映射 $\Omega: V\times V\to\mathbf{R}$, 并且当固定其中一个变量时, 是关于另一个变量的线性映射. 如果对任意 $\xi\neq 0$, 都存在 $\eta\in V$, 使 $\Omega(\xi, \eta)\neq 0$, 此双线性形式称为**非退化的**. 向量空间 $V$ 上的非退化双线性形式如果还满足反对称性, 即 $\Omega(\xi, \eta)=-\Omega(\eta, \xi)$, 我们称此形式为**辛形式**. 一个具有辛形式的向量空间称为**辛向量空间**, 通常记为$(V, \Omega)$, $\Omega$ 称为**辛结构**.

**[例 1]** $\mathbf{R}^{2n}$ 上的标准正交基记为 $e_i$(这里 $i=1, 2, \cdots, 2n$). 通过定义辛形式 $\Omega_{st}$ 作用在标准正交基上的取值, 即可完全确定此辛结构. 定义当 $1<i<n$ 时, $\Omega_{st}(e_i, e_{i+n})=1=-\Omega(e_{i+n}, e_i)$, 而对其它任意 $i$、$j$, 则是 $\Omega_{st}(e_i, e_j)=0$.

设$(V, \Omega)$和$(W, \Sigma)$都是辛空间. 如一个线性映射 $f: V\to W$ 使其拉回 $f^*\Sigma=\Omega$, 则称 $f$ 是**辛映射**. 映射的拉回是指 $f^*\Sigma(\xi, \eta)=\Sigma(f(\xi), f(\eta))$, $\forall\xi$、$\eta\in V$. 由辛映射的定义, 可知:

**定理 1** 线性辛映射是单射.

**证明** 取 $x\in\ker f$, 对任意 $y\in V$, $\Omega(x, y)=\Sigma(f(x), f(y))=0$.

如果一个线性辛映射还具有线性同构的性质, 即线性的, 双向可逆的, 则称为**线性辛同构**. 这种情况下, 我们称 $V$, $W$ 为"辛同构", 从而可以在辛同构这一层意义上将二者视为等同的.

**定理 2** (达布) 任何辛向量空间都具有偶次维. 对任意整数

$n\geqslant 1$, 总存在一个辛空间, 其维数为 $2n$, 即 $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_{st})$. 任何两个具有相同维数的辛空间总是同构的.

如果 $W$ 是 $V$ 的一个子空间, 可将 $V$ 上的辛结构约束到 $W$ 上, 即 $\Omega|_W$, 这相当于将映射 $\Omega: V\times V\to\mathbb{R}$ 限制到 $W\times W\subset V\times V$ 上. 若引入包含映射 $i: W\to V$, $\Omega|_W=i^*\Omega$, 如果 $i^*\Omega$ 是非退化的, 则 $(W, \Omega|_W)$ 是一个辛空间, 称为 $(V, \Omega)$ 的辛子空间. 关于 $\Omega$, 还可以引入"辛正交"的概念. 一个向量 $\xi$ 称辛正交于 $\eta$, 是指 $\Omega(\xi, \eta)=0$. 记 $W^\perp$ 为 $W$ 在 $V$ 中的辛正交补.

**定理3** 一个辛子空间 $W$ 的辛正交补 $W^\perp$ 也是辛子空间, 它是 $W$ 在 $V$ 中的代数补.

**证明** 如果既有 $\xi\in W$, 又有 $\xi\perp W$, 由 $\Omega$ 的非退化性, 必有 $\xi=0$. 这说明 $W\cap W^\perp=\varnothing$. 既然 $\dim W+\dim W^\perp=\dim V$, $V=W+W^\perp$. 如果 $\xi\in W^\perp$, $\xi\top W^\perp$, 那么 $\xi\perp V$. 由 $\Omega$ 的非退化性得知 $\xi=0$. 这说明 $\Omega|_{W^\perp}$ 的非退化性.

**推论** 如果 $W$ 是辛子空间, 那么 $W^{\perp\perp}=W$.

上面的论证说明了 $V$ 的一个正交分解. 不仅如此, 我们还可以将这种分解继续下去. 设 $V$ 是一个辛空间, 并且不是一个零. 这相应于零维空间. 取任意非零向量 $\xi_1\in V$, 总存在 $\eta_1\in V$ 使得 $\Omega(\xi_1, \eta_1)\neq 0$. 可设 $\Omega(\xi_1, \eta_1)=1$, 因为总可以通过调整 $\eta_1\xi_1$ 的系数来达到这一点. 记 $W_1$ 是由 $\xi_1$、$\eta_1$ 张成的二维空间. 将 $\Omega$ 约束到 $W_1$ 显然是非退化的, 因而是辛子空间. 由上面的研究可知, $W_1^\perp$ 也是辛子空间, 因而可以继续对 $W_1^\perp$ 进行上述过程, 只要 $\dim W_1^\perp>0$. 所以可以得到下列正交分解:

$$V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_n.$$

既然 $\{\xi_i, \eta_i\}$ 是 $W_i$ 的辛正交基, 那么 $\{\xi_i, \eta_i, 1\leqslant i\leqslant n\}$ 构成 $V$ 的辛正交基. 定义 $f: V\to\mathbb{R}^{2n}$, 使 $f(\xi_i)=e_i$、$f(\eta_i)=e_{i+n}$, 我们得到 $V$ 与 $\mathbb{R}^{2n}$ 之间的一个辛同构.

利用正交分解, 我们还可以引入"辛正交投影"概念. 设 $W$ 是 $V$ 的辛子空间, $V=W\oplus W^\perp$. 定义投影 $P: V\to V$, 使 $\operatorname{Im}P=W$,

$\ker P = W^{\perp}$.

**定理4** $V$ 到 $V$ 的线性映射是正交投影的充分必要条件，是 $P^2=P$ 和 $P^*=P$.

这里 $P^*$ 是表示 $P$ 的伴随映射，即对所有的 $u$、$v\in V$, $\Omega(Pu, v)=\Omega(u, P^*v)$. $\Omega$ 的非退化性保证了这个映射的存在与唯一性.

给定两个辛空间 $(V_1, \Omega_1)$ 与 $(V_2, \Omega_2)$. 考虑两个空间的直和 $V=V_1\oplus V_2$,在上面可以装备一个辛结构 $\Omega$,使 $V$ 可以分解为两个辛子空间的直和: $V_1\oplus V_2$. 实际上,对任意 $\xi$、$\eta\in V$, $\xi=\xi_1\oplus\xi_2$, $\eta=\eta_1\oplus\eta_2$, $\xi_i$、$\eta_i\in V_i (i=1, 2)$, 令 $\Omega(\xi, \eta)=\Omega_1(\xi_1, \eta_1)+\Omega_2(\xi_2, \eta_2)$. $\Omega$ 称为 $\Omega_1$ 与 $\Omega_2$ 的直和.

除去以上研究的辛子空间以外,还有一个非常重要的子空间,即拉格朗日子空间. 一个辛空间 $V$ 的子空间 $W$ 称为迷向的, 如果将 $\Omega$ 限制在 $W$ 上时它恒为零,即 $\Omega|_W=0$, 或 $W^{\perp}\supset W$. 根据反对称性, 任何一维子空间均是迷向的. 一个子空间称为拉格朗日子空间如果它是迷向的,而且是最大的. 即 $W$ 是拉格朗日子空间意味着(1) $W^{\perp}\supset W$, (2)如果 $W'$ 是 $V$ 的子空间并使得 $W'\supset W$ 且 $(W')^{\perp}\subset W'$, 那么 $W'=W$. 根据这个定义, $W$ 是拉格朗日子空间的充要条件是 $W^{\perp}=W$. 容易证明, 任何迷向子空间都包含在某一个拉格朗日子空间之中.

**定理5** 若 $V=W\oplus W'$, 且二者都是迷向的, 则二者都是拉格朗日子空间.

**证明** 对任意 $\xi\in W^{\perp}$, 相应于空间的直和分解有分解 $\xi=w+w'$. 既然 $W$、$W'$ 都是迷向的, $w\perp W$, 因而 $w'\perp W$, 同时有 $w'\perp W'$. 这说明 $w'$ 相对于 $W$、$W'$ 都是正交的, 所以 $w'=0$, $\xi=w\in W$. 因此 $W^{\perp}=W$, 即 $W$ 是拉格朗日子空间. 对 $W'$ 的证明亦相同.

**定理6** 所有拉格朗日子空间的维数都是辛空间维数的一半. 任一个拉格朗日子空间都有一个也为拉格朗日子空间的代

数补.

**证明** 设 $L$ 是一个拉格朗日子空间，并考虑所有满足 $M\cap L=\{0\}$ 的迷向子空间，其中有一个最大的子空间 $L'$. 既然 $L\cap L'=\{0\}$, $V=L^{\perp}+(L')^{\perp}=L+(L')^{\perp}$, 而且 $(L')^{\perp}\subset L\oplus L'$. 否则，存在向量 $v\perp L'$, 并且 $v\notin L\oplus L'$. 用 $L'$ 和 $v$ 张成的子空间 $M'$ 也是迷向的, $M'\cap L=\{0\}$, 由此可得 $M'\supsetneqq L'$ 的矛盾结果. 所以 $V=L+(L')^{\perp}\subset L\oplus L'$, 即 $V=L\oplus L'$. 根据定理 5, $L'$ 也是拉格朗日子空间. 定义线性映射 $\mathscr{A}: L\to(L')^*$, 对 $v\in L$、$v'\in L'$, $(\mathscr{A}v)(v')=\Omega(v, v')$. 如果 $v\in\ker\mathscr{A}$, 对所有 $v'\in L'$ 有 $\Omega(v, v')=0$. 因为 $L$ 是迷向的, 对 $v''\in L$, $\Omega(v, v'')=0$. 所以对任意 $w\in V$, 都有 $\Omega(v, w)=0$. 根据 $\Omega$ 的非退化性, $v=0$. 因此, 我们得到一个 $L$ 到 $L'$ 的同构, 从而说明拉格朗日子空间的维数一定是大空间维数的一半.

**推论** (i) 一个迷向子空间是拉格朗日子空间的充分必要条件是其维数为大空间的一半.

(ii) 两个拉格朗日子空间 $W$、$W'$ 横截相交的充分必要条件是 $W\cap W'=\{0\}$. 此处"横截相交"的意思是 $V=W\oplus W'$. 如果 $W$ 与 $W'$ 是横截拉格朗日子空间, 我们 $V=W\oplus W'$ 是一个拉格朗日分解, $W'$ 是 $W$ 的拉格朗日补. 投影映射 $\pi$ 称为拉格朗日投影, 如果它的核和值域分别是 $W$ 和 $W'$.

[例] 对于 $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_{st})$ 而言, $W=\mathrm{span}(e_1, \cdots e_n)$, $W'=(e_{1+n}, \cdots, e_{2n})$ 都是拉格朗日子空间. 将 $(e_1, \cdots, e_n)$ 与 $(e_{n+1}, \cdots, e_{2n})$ 中 $e_i$ 与 $e_{i+n}$ 置换得到的两组向量张成的子空间也都是拉格朗日子空间.

## §3 辛流形

设 $M$ 是一个 $2n$ 维的微分流形. $M$ 上的一个辛结构, 是指 $M$ 上的一个非退化闭微分 2-形式 $\Omega$:

$$d\Omega=0,\quad \forall\xi\in T_xM,\quad \exists\eta\in T_xM\quad \text{s.t.}\quad \Omega(\xi,\eta)\neq 0.$$

$(M, \Omega)$被称为**辛流形**. 对任意$x\in M$, 其切空间即为一个辛空间. 由于要求$\Omega$是非退化的,在奇次维流形上是不可能装备辛结构的.

设$(M, \Omega)$、$(W, \Sigma)$是两个辛流形. 对于一个光滑映射$M\to W$, 如果它保持辛结构不变, 则称它为**辛映射**. 所谓不变, 是指$f^*\Sigma=\Omega$. 由§2的定理1,可得

**定理1** 每一个辛映射是一个浸入.

仍设$(M, \Omega)$是辛流形. 考虑$M$上的子流形$S$, 它是光滑的. 如果对每一个$x\in S$, $S$在$x$处的切空间$T_xS$是$T_xM$的辛子空间, 称$S$为$M$的辛子流形. 记$i: S\subset M$为包含映射, $S$上的辛结构便是$i^*\Omega$, 而$i$显然是辛映射.

考虑关于商空间的概念. 一个光滑映射$p: X\to Y$, $X$是辛流形, $Y$是光滑流形, $p$是映上的. 现在的问题是是否存在$Y$上的辛结构, 使得$p$是一个辛映射. 如果存在, 这个结构是唯一的. 装备有这种结构的流形$Y$称为**商辛流形**. 一个典型的例子是关于覆盖空间的. 一个从$X$到$Y$的映射$p$是一个覆盖的条件是$p$映上、$X$与$Y$非空且连通, 对每一个$y\in Y$总有一邻域$u$使得原象$p^{-1}(u)$是一组互不相交的开集$V_i$, $p$在每一$V_i$上的限制是从$V_i$到$u$的同胚. 如果$p$是一个光滑覆盖, $p$还需满足光滑性条件以及浸没. 这些条件保证$p|V_i$是一个微分同胚. 设$X$上装备有一个辛结构, 那么$Y$上具有商辛结构的充分必要条件是$u$上的辛形式$((p|V_i)^{-1})^*\Omega$对所有的$V_i$都是相同的.

现在研究余切丛上的辛结构. 设$M$是$n$维流形$(n\geqslant 1)$. $M$的余切丛$\pi: T^*M\to M$是$2n$维流形. 此$2n$维流形上有一个自然辛结构. 为了描述此结构, 我们考虑如下的交换图:

$$\begin{array}{ccc} TT^*M & \longrightarrow & T^*M \\ {\scriptstyle T\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ TM & \longrightarrow & M \end{array} \tag{3.1}$$

上图中，横向箭头表示切丛上的投影．$T\pi$ 是投影 $\pi$ 的切映射．若取 $q\in M$，$p\in T_q^*M$ 以及 $v\in T_pT^*M$，那么根据上面的交换图，$T\pi(v)$ 是一个属于 $T_qM$ 的切向量，将余切向量 $p\in T_q^*M$ 作用在 $T_p\pi(v)\in T_qM$，便得到一个实数 $p(T\pi(v))$．这些作用都是线性的，因此映射 $p\circ T_p\pi: T_pT^*M\to\mathbb{R}$ 是 $T_pT^*M$ 上的线性函数，它确定了一个 $\Theta_M(p)\in T_p^*T^*M$．根据定义，

$$\Theta_M(p)v=p\circ T_p\pi(v),\qquad v\in T_pT^*M. \tag{3.2}$$

这样我们得到一个向量从 $T^*T^*M\to T^*M$ 上的截面 $p\to\Theta_M(p)$，这样一个 $T^*M$ 上的 1-形式 $\Theta_M$ 称为刘维尔形式．由此可以得到一个辛结构

$$\Omega_M=-d\Theta_M.$$

显然 $\Omega_M$ 是闭的，而且还是正合的．至于非退化性，考虑局部坐标就够了．设 $(u,\alpha)$ 是 $M$ 上的一个坐标卡，$q^i=pr_i\circ\alpha$ 是局部坐标函数 $(1\leqslant i\leqslant n)$．考虑 $T^*M$ 相应的坐标卡，局部坐标是 $(q^1,\cdots,q^n,p_1,\cdots p_n)$．$p\in T_q^*M$ 有如下的表达式

$$p=\sum_{i=1}^n p_i dq^i|_q. \tag{3.3}$$

向量 $v\in T_pT^*M$ 有表达式

$$v=\sum_{i=1}^n\left(v_i\frac{\partial}{\partial q^i}\bigg|_p+w_i\frac{\partial}{\partial p_i}\bigg|_0\right). \tag{3.4}$$

余切向量投影 $\pi_i T^*M\to M$ 在坐标卡 $(T_uM,\alpha)$ 下有下面的表达式

$$(q^1,\cdots,q^n,p_1,\cdots,p_n)\to(q^1,\cdots,q^n).$$

所以

$$T\pi(v)=\sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial}{\partial q^i}. \tag{3.5}$$

根据关系(3.2)式，可知

$$\Theta_M(p)=\sum_{i=1}^n p_i dq^i\Big|_p,$$

因而，在局部坐标之下有

$$\Omega_M|T_u^*M=\sum_{i=1}^n dq^i\wedge dp_i, \tag{3.6}$$

这显然是非退化的. 通常, 称 $\Omega_M$ 为"$M$ 的余切丛上的正则辛结构."例如我们可以视 $\mathbb{R}^n$ 上的余切丛为 $\mathbb{R}^{2n}$, 这时存在一个全局坐标卡($\mathbb{R}^{2n}$, $id_{\mathbb{R}^{2n}}$), 坐标函数为($q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n$), 刘维尔形式为 $pdq$.

流形上的刘维尔形式有一些特殊的性质.

**定理2** $T^*M$ 上的 1-形式 $\theta$ 是刘维尔形式的充分必要条件是等式

$$\sigma^*\theta=\sigma \tag{3.7}$$

对所有光滑截面 $\sigma: M\to T^*M$ 成立.

**证明** 首先证明 $\Theta_M$ 满足 (3.7). 任取 $u\in T_qM$, 然后计算 $\sigma^*\Theta_M$ 在 $u$ 处的取值. 考虑到 $\pi\circ\sigma=id_M$,

$$\begin{aligned}\sigma^*\Theta_M(u)&=\Theta_M(\sigma_q)(T_q(\sigma u))\\&=\sigma_q(T_{\sigma_q}\pi\cdot T_q\sigma(u))=\sigma_q(u).\end{aligned} \tag{3.8}$$

现在证明充分性. 对 $\theta$ 是 $T^*M$ 上对所有 $\sigma$ 满足(3.7)的 1- 形式, 根据(3.8), 有 $\sigma^*\theta=\sigma=\sigma^*\Theta$. 因为当 $\sigma$ 取遍所有的截面时 $T_q\sigma u$ 张成了 $T_q(T^*u)$, 所以 $\theta=\Theta$.

设 $f: M\to N$ 是一个浸入, $M$, $N$ 具有相同的维数. 定义逆步映射 $T^{*-1}f: T^*M\to T^*N$: 如果 $p\in T_q^*M$, 那么

$$T^{*-1}f(p)=[(T_qf)^*]^{-1}(p).$$

逆步逆射也是一个浸入. 这是丛上的射. 如果 $f$ 是微分同胚, $T^{*-1}f$ 也是微分同胚.

**定理3** 如果 $f: M\to N$ 是流形 $M$ 与 $N$ 之间的微分同胚, 那么

$$(T^{*-1}f)^*\Theta_M=\Theta_N.$$

**证明** 记 $\theta'=(T^{*-1}f)\Theta_N$. 取 $\sigma$: $M\to T^*M$ 是一个光滑截面. 记 $\sigma'=T^{*-1}f\circ\sigma\circ f^{-1}$, 于是

$$\begin{aligned}\sigma^*\theta'&=\sigma^*(T^{*-1}f)\Theta_N=(T^{*-1}f\circ\sigma)^*\Theta_N\\&=(\sigma'\circ f)^*\Theta_N=f^*\sigma'^*\Theta_N=f^*\sigma'.\end{aligned} \tag{3.9}$$

为了计算 $f^*\sigma'$, 取 $v\in T_qM$, $q\in M$, 记 $v'=T_qf(v)\in T_{f(q)}N$. 于

是 $f^*\sigma'(v)=\sigma'(T_qf(v))=\sigma'(v')=((T^{*-1}f)_q\cdot\sigma_q)(v')=[(T_qf)^{-1}]^*\sigma_q(v')=\sigma_q((T_qf)^{-1}v')=\sigma_q(v)$. 这样我们得到 $f^*\sigma'=\sigma$. 所以(3.9)说明 $\theta'$ 满足性质(3.2), 进而 $\theta'=\Theta_N$.

由定理 3 立即可得:

**推论** 如果 $u\subset M$ 是一个非空开集, 那么 $\Theta_u=\Theta_M|_{T^*_uM}$.

在辛流形上除考虑辛子流形之外, 另一个重要概念是拉格朗日子流形. 辛流形 $M$ 上的子流形 $L$ 如果具有性质: $L$ 上每一点处的切空间是 $M$ 在此处切空间的迷向子空间, 则 $L$ 被称为迷向子流形. 如果此迷向子流形的维数是辛流形的一半, 此子流形称为拉格朗日流形. 这方面一个典型的例子是余切丛上零截面的象. 如果余切丛上装备有正则辛结构, 底流形显然是拉格朗日子流形. 这里取的是一个特殊截面的象, 即零截面. 实际上, 并非仅是这个截面的象才是拉格朗日流形.

**定理 4** 一个光滑截面 $\sigma: M\to T^*M$ 的象是余切丛上的拉格朗日子流形的充分必要条件是 $\sigma$ 为闭即 $d\sigma=0$.

**证明** $\sigma$ 的象具有拉格朗日子流形所具有的维数. 所需要证明的仅是 $\Omega_M$ 在 $\operatorname{Im}\sigma$ 上为零, 即 $\sigma^*\Omega_M=0$. 但是,

$$\sigma^*\Omega_M=\sigma^*d\Theta_M=d\sigma^*\Theta_M=d\sigma.$$

在不至于引起混淆的情况下, 我们将一个流形和它的余切丛上零截面的象等同起来. 这时, 所谓 $X$ 中的拉格朗日子流形 $L$ 的正则邻域,是一个二元组$(U,\psi)$,其中 $U$ 是 $L$ 在 $T^*L$ 中的一个开邻域, $\psi: U\to X$ 是一个辛局部微分同胚, 它保持 $L$ 上的点不动, 将 $u$ 映上到 $L$ 在 $X$ 中的一个开邻域.

**定理 5** 任何一个拉格朗日子流形总有一个正则邻域.

证明略.

现在我们研究辛映射的图象. 设 $f$: $X\to Y$ 是两个辛流形 $(X,\Omega)$、$(Y,\Sigma)$之间的光滑映射. $f$ 的图象是一个集合

$$\operatorname{graph}(f)=\{(x,y)\in X\times Y;\, y=f(x)\},$$

这是一个 $X\times Y$ 的子流形，维数和 $X$ 相同. 在 $X\times Y$ 上装配一个辛结构 $\Pi=\Omega\oplus(-\Sigma)$. 从这个角度看，我们有下列结果：

**定理 6** 映射 $f$ 是辛映射的充分必要条件是 $\mathrm{graph}(f)$ 是 $(X\times Y,\ \Pi)$ 的迷向子流形.

**证明** 考虑向量 $w_i=(u_i,\ v_i)\in T_{(x,y)}X\times Y$，$i=1,\ 2$，其中 $u_i\in T_xX$，$v_i\in T_yY$. 取 $(x,\ y)\in\mathrm{graph}(f)$，则 $w_i\in T_{(x,y)}\mathrm{graph}(f)$ 的充分必要条件是 $v_i=T_xf(u_i)$.

$$\Pi(w_1,\ w_2)=\Omega(u_1,\ u_2)-\Sigma(v_1,\ v_2)=\Omega(u_1,\ u_2)-f^*\Sigma(u_1,\ u_2).$$

如果要求对所有的 $w_1$、$w_2\in T_{(x,y)}\mathrm{graph}(f)$，总有 $\Pi(w_1,\ w_2)=0$，充分必要条件是 $f$ 保持辛结构不变.

作为一个特例，如果 $f$ 是一个局部微分同胚，那么 $f$ 是辛同胚的充分必要条件是它的图象是象空间与原象空间的乘积上的拉格朗日流形.

考虑一个特殊的辛流形 $(\mathbb{R}^{2n},\ \Omega_{st})$. 在这个辛流形上，拉格朗日流形至少可以局部地由一个数值函数（通常称为母函数）来决定. 我们先找出两个较特殊的拉格朗日流形 $L_a$ 与 $L_{\bar a}$，$a$ 是 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 的子集，$\bar a$ 是 $a$ 的补. $L_a$ 由 $(e_i(i\in a),\ e_{n+1}(i\in\bar a))$ 张成，$L_{\bar a}$ 则是由 $(e_i(i\in\bar a),\ e_{n+i}(i\in a))$ 张成. 记 $\pi_a$: $\mathbb{R}^{2n}\to L_a$ 是沿着 $L_{\bar a}$ 的拉格朗日投影. 现在我们将 $(\mathbb{R}^{2n},\ \Omega_{st})$ 看成一个辛流形，$L_a$ 与 $L_{\bar a}$ 是拉格朗日流形，$\pi_a$ 成为一个辛映射. 考虑另一个拉格朗日流形 $\mathscr{L}\subset\mathbb{R}^{2n}$，并假定

$$\pi_a|_{\mathscr{L}}\text{ 是一个局部微分同胚,}\qquad(3.10)$$

取 $u$ 是它在 $L_a$ 中的象，这样我们可得到如下的交换图：

$$\begin{array}{ccccc}\mathscr{L} & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{\pi_a} & L_a \\ & & & \nwarrow h & \cup \\ & & & & u\end{array}$$

其中 $i$ 表示从 $\mathscr{L}$ 到 $\mathbb{R}^{2n}$ 的包含映射，$h=i\circ(\pi_a\circ i)^{-1}$. 显然 $\mathscr{L}=h(u)$. 考虑定义在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的 1-形式

$$\theta=\sum_{i\in a}p_i dq^i-\sum_{j\in\bar{a}}q^j dp_j.$$

形式$\lambda=h^*\theta$因而是闭的,实际上,$d\lambda=h^*d\theta=-h^*\Omega_{st}=-[(\pi_a\circ i)^{-1}]$ $*i^*\Omega_{st}=0$, 因为 $\mathscr{L}$ 是拉格朗日流形, 从而 $i^*\Omega_{st}=0$. 我们进一步假设

$$\mathscr{L}\text{ 微分同胚于 }n\text{-球} \tag{3.11}$$

根据庞加莱的一个引理(在 $n$-球上的一个闭形式一定是正合的), 存在一个函数 $S\in C^\infty(u)$ 使 $\lambda=dS$, $\mathscr{L}$ 的方程因而可以写成形式 $p_i=h_i(x)$, $q^j=h_{n+j}(x)$, $i\in a$, $j\in\bar{a}$, $x\in u$. 在 $u$ 内取直角坐标系 $(q^i, p_j, i\in a, j\in\bar{a})$. 既然

$$\lambda=\sum_{i\in a}h_i dq^i+\sum_{j\in\bar{a}}h_{n+j}dp_j,$$

$\mathscr{L}$ 的方程就是

$$p_i=\frac{\partial S}{\partial q^i},\quad q^j=-\frac{\partial S}{\partial p_j}.\quad i\in a,\ j\in\bar{a} \tag{3.12}$$

函数 $S=S(q^i, p_j, i\in a, j\in\bar{a})$称为 $\mathscr{L}$ 的母函数, 坐标$(q^i, p_j, i\in a, j\in\bar{a})$称为焦点坐标.

在一般情况下, $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_{st})$的一个拉格朗日流形并不满足条件(3.10)和(3.11), 然而这两个条件在局部上可以满足: 对每点 $z\in\mathscr{L}$, 存在一个邻域 $\mathscr{L}'\subset\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$ 可以由一个母函数来决定.

## §4 哈密顿动力系统

本节将讨论一些辛动力系统的概念和基本性质. 为方便起见, 我们分别讨论离散时间情况(映射)和连续时间情况(流).

首先考虑离散时间系统. 设 $X$ 是一个辛流形. 一个 $X$ 中的局部辛同胚是一个光滑内射$f: U\to X$, 其中 $U$ 是 $X$ 中的开集, $f$ 保持辛结构不变. 一个离散辛动力系统是一个二元组$(X, f)$, 其中 $X$ 是一个辛流形, $f$是一个 $X$ 中的局部辛微分同胚. 我们称 $X$ 是相空间, $U$ 是系统的定义域, 而系统的自由度数为 $n+1$,

$n=\dfrac{1}{2}\dim X$. 经过 $x\in U$ 的一个轨道是$\{f^t(x): t\in\mathbb{Z}, f^t(x)$存在$\}$. 如果此系统的定义域 $U$ 是 $X$ 本身, 我们称此系统是完全的. 换句话说, 一个完全系统是一族辛微分同胚 $f^t$: $X\to X$, $t\in\mathbb{Z}$, 使得 $f^0=id$, $f^{t_1+t_2}=f^{t_1}\circ f^{t_2}$ 对所有 $t_1$、$t_2\in\mathbb{Z}$ 成立.

其次考虑连续时间系统. 设$(X, \Omega)$是一个辛流形, 利用这个辛结构我们可以建立起一个 $T^*X$ 与 $TX$ 之间的同构.

对每一个在 $x\in X$ 处的切向量 $\xi$, 我们以下列方式连带上一个 $T_xX$ 上的 1 形式 $\theta_\xi$

$$\theta_\xi(\eta)=\Omega(\xi, \eta). \qquad \forall\eta\in T_xX$$

显然用这种方式 $\xi\to\theta_\xi$ 确定了 $2n$ 维向量空间和 1-形式的同构关系. 记这种同构关系为 $I$. 取 $H$ 为 $X$ 上的函数, 于是 $dH$ 是 $X$ 上的 1 形式. 通过上述方式在 $X$ 的每一点处都有一切向量与之相对应, 从而得到 $X$ 上的切向量 $IdH$.

**定义 1** 向量场 $IdH$ 称为**哈密顿向量场**, $H$ 称为**哈密顿函数**.

实际上, 这种定义只是局部的. 对全局而言, 我们并不一定要寻找一个函数定义在整个 $X$ 上. 为了得到向量场和 1 形式之间的同构关系, 我们只要求这种 1 形式必须是闭的. 而在某一局部开球上, 闭的 1 形式必然是正合的, 故而存在(局部)哈密顿函数. 对于局部哈密顿向量场, 由 Darboux 定理, 我们可以找到 Darboux 局部坐标$(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$, $2n=\dim X$, 哈密顿向量场的形式是

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i}-\frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right). \tag{4.1}$$

如果存在一个全局的哈密顿函数, 即定义在 $X$ 上, 使得 $X$ 上的整个向量场都可以由 $IdH$ 来得到, 我们称此系统为哈密顿动力系统. 在一般情况下, 辛流形$(X, \Omega)$上的辛动力系统并不一定有一个哈密顿函数与之对应. 这完全取决于 $X$ 上的一阶上同调群

$H^1(X, \mathbb{R})$是否为零. 若为零, 则必存在哈密顿函数; 否则, 则不然.

点 $x\in X$ 的轨道是向量场通过 $x$ 的积分曲线, 这个曲线是下列方程的解

$$\frac{d}{dt}f^t=\xi\circ f, \tag{4.2}$$

$f^t(x_0)$: $X\times\mathbb{R}\to X$, $f^{t_0}(x)=x$. 这个轨道是经过 $x$ 的最大积分曲线的象. 在达布(J. G. Darboux)局部坐标下, (4.2)具有下列形式:

$$\dot{q}^i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q^i}, \qquad 1\leqslant i\leqslant n \quad (1.4)$$

为简单起见, 我们设此系统是完全的. 如果将 $x$ 取遍 $X$, 让 $t$ 变化, 我们则得到一个单参数变换群. 这个群的每一个元都是微分同胚 $X\circlearrowleft$, 而 $f^t$ 则称为相流. 如果存在全局的哈密顿函数, 它称为哈密顿流, 相应的方程为

$$\frac{d}{dt}f^t(x)=IdH(f^t(x)). \tag{4.2$'$}$$

**定理1** 哈密顿流保持辛结构不变:

$$(f^t)^*\Omega=\Omega.$$

为了证明这一定理, 我们需要一些记号. 设 $M$ 是任一流形, $C$ 是 $M$ 上的 $k$ 链, $f^t$: $M\to M$ 是一个单参数可微映射. 由此可以构造一个$(k+1)$链 $JC$, 称为在同伦 $f^t(0\leqslant t\leqslant\tau)$之下 $C$ 的轨迹. 取$(D, g, Or)$是链 $C$ 中的一单元, 与之相应在 $JC$ 中有一单元$(D', g', Dr')$, 其中 $D'=I\times D$ 是区间 $0\leqslant t\leqslant\tau$ 与 $D$ 的直积, 映射 $g'$: $D'\to M$ 由 $g$: $D\to M$ 以如下方式得到: $g'(t, x)=f^tg(x)$; 包含 $D'$ 的 $\mathbb{R}^{k+1}$ 的定向由坐标架 $e_0, e_1, \cdots, e_k$ 得到, 其中 $e_0$是 $t$ 轴上的单位向量, $e_1,\cdots,e_k$ 是 $D$ 的定向. 这样, $JC$ 可以看成由 $C$ 在同

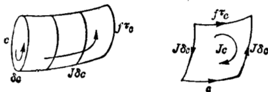



图 1-1

伦 $f^t$ 作用之下横扫过去的区域. $(k+1)$链的边界包含两终端，它们分别是 $C$ 的初始与终止位置，以及由 $C$ 的边界扫出的 $J\partial C$. 容易验证，在如上的定向选择下，有下列关系:

$$\partial(JC_k)=f^\tau C_k-C_k-J(\partial C_k). \tag{4.3}$$

**引理** 设 $\gamma$ 是辛流形$(X, \Omega)$中的 1 链，$f^t$ 是具有哈密顿函数 $H$ 的哈密顿流. 于是

$$\frac{d}{d\tau}\int_{J\gamma}\Omega=\int_{f^\tau\gamma}dH.$$

**证明** 只需对只有一个单元 $g:[0, 1]\to X$ 的链 $\gamma$ 验证. 记

$$g'(s, t)=f^tg(s),\ \xi=\frac{\partial g'}{\partial s},\ \eta=\frac{\partial g'}{\partial t}\in TX_{g'(s,t)}.$$

根据积分定义:

$$\int_{J\gamma}\Omega=\int_0^1\int_0^\tau\Omega(\eta, \xi)dtds.$$

但是根据相流的定义，$\eta$ 是哈密顿场的一个向量，位于 $g'(s, t)$. 根据哈密顿场的定义 $\Omega(\xi, \eta)=dH(\xi)$，所以

$$\int_{J\gamma}\Omega=\int_0^\tau\left(\int_{f^t\gamma}dH\right)dt.$$

**推论** 如果 $\gamma$ 是闭的，则$\int_{J\gamma}\Omega=0$.

**定理 1 的证明** 考虑一个 2 链 $C$. 我们有

$$0=\int_{JC}d\Omega=\int_{\partial JC}\Omega=\left(\int_{f^\tau C}-\int_C-\int_{J\partial C}\right)\Omega$$

$$=\int_{f^\tau C}\Omega-\int_C\Omega.$$

第一个等号是因为 $\Omega$ 是闭的，第二个是根据斯托克斯公式，第三个等号是根据(4.3)，第四个是根据引理的推论，因为 $J\partial C$ 的边界为空.

现在我们研究哈密顿系统的积分不变量. 记 $f: M\to M$ 是一个可微映射.

**定义 2** 如果 $k$-形式 $\omega$ 在任一 $k$-链 $C$ 上的积分与其在 $C$ 关

于 $f$ 的象上的积分相等：

$$\int_{fC} \omega = \int_{C} \omega. \tag{4.4}$$

那么 $k$-形式 $\omega$ 称为关于映射 $f$ 的**积分不变量**.

根据这种定义，形成辛结构的 2-形式 $\Omega$ 是哈密顿流的积分不变量. 不仅如此，$\Omega$ 的外幂 $\Omega^k$（其中 $k=1, 2, \cdots$）

$$\Omega^2=\Omega\wedge\Omega,\ \Omega^3=\Omega\wedge\Omega\wedge\Omega,\ \cdots\cdots$$

也是积分不变量. 在$(X, \Omega)$上通过 $\Omega^n$ 定义体积元，显然哈密顿流保持体积不变. 这就是本章 §1 中的刘维尔定理.

这些积分不变量一般称为**绝对积分不变量**，因为对任意的 $k$ 链(4.4)都成立. 这样就引出了"相对积分不变量"的概念：

**定义 3** 微分 $k$ 形式 $\omega$ 称为**相对积分不变量**，如果(4.4)对每一个闭 $k$ 链 $C$ 都成立.

**定理 2** 如果 $\omega$ 是一个相对积分不变量，那么 $d\omega$ 是一个绝对积分不变量.

**证明** 取 $C$ 是一个$(k+1)$链，于是

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega = \int_{f\partial C} \omega = \int_{fC} d\omega.$$

**定理 3**（能量守恒律） 函数 $H$ 是相应的哈密顿流的首次积分.

**证明** $H$ 在 $\eta$ 方向的导数等于 $dH$ 在 $\eta$ 上的取值. 根据哈密顿向量场的定义 $\eta=IdH$，因此

$$dH(\eta)=\Omega(\eta, IdH)=\Omega(\eta, \eta)=0. \tag{4.5}$$

由 (4.5) 还容易证明 1-形式 $dH$ 也是哈密顿流的积分不变量.

为了阐述重要的庞加莱-康托积分不变量，我们需要将"相空间"流形 $X$ 扩张为奇数维，即加上时间一维. 记 $M^{2n+1}$ 为$(2n+1)$维微分流形，$\omega^1$ 是 $M$ 上的微分 1 形式，$\omega^2$ 是微分 2 形式. 首先叙述一个重要的引理，这只对奇数维流形成立：

**引理1** 设 $\omega^2$ 是 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 上的外代数2形式. 存在非零向量 $\xi\neq 0$,使得

$$\omega^2(\xi, \eta)=0. \qquad \forall \eta\in \mathbb{R}^{2n+1}$$

**证明** 在 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中,2形式 $\omega^2$ 可由一个反对称矩阵 $A$ 表示:

$$\omega^2(\xi, \eta)=\langle A\xi, \eta\rangle,$$

此处 $\langle\cdot, \cdot\rangle$ 是欧几里德内积. 由于空间维数是奇数, 所以 $A^t=-A$, $\det A=\det A^t=\det(-A)=(-1)^{2n+1}\det A=-\det A$. 由此可得 $A$ 的行列式为0, 这意味着 $A$ 有一个特征向量 $\xi\neq 0$ 对应于特征值0.

这个 $\xi$ 一般称为 $\omega^2$ 的**无效向量**. 所有这些无效向量构成一个线性子空间。如果这个子空间只是一维的,我们称 $\omega^2$ 是**非退化的**. 根据引理(4.8), 在每点 $x\in M^{2n+1}$, 总存在一方向 $\xi$(即切空间 $T_xM$ 上的直线$\{C\xi\}$), $\omega^1$ 沿着包含有这个方向的"无限小矩阵"的边界积分为0, 即

$$d\omega^1(\xi, \eta)=0. \qquad \forall \eta\in T_xM$$

如果进一步假设2-形式 $d\omega^1$ 非退化,方向 $\xi$ 是唯一决定的。我们称此方向为 $\omega^1$ 的"**涡向**". 涡向场的积分曲线称为 $\omega^1$ 的**涡线**或**特征线**. 取 $\gamma_1$ 是 $M$ 上的一个闭曲线, 所有从这条曲线上出发的涡线形成一个涡管. 这时我们有如下的多维斯托克斯引理:

**引理2** 1-形式 $\omega^1$ 沿着任意两个围绕相同涡管的闭曲线的积分是相同的. 即:如果 $\gamma_1-\gamma_2=\partial\sigma$, $\sigma$ 是涡管的一段,则

$$\oint_{\gamma_1}\omega^1=\oint_{\gamma_2}\omega^1.$$

**证明** 根据斯托克斯公式:

$$\oint_{\gamma_1}\omega^1-\oint_{\gamma_2}\omega^1=\int_{\partial\sigma}\omega^1=\int_{\sigma}d\omega^1.$$

但根据引理1, $d\omega^1$ 在 $\sigma$ 上的积分为零.

应用这一引理到哈密顿方程, 可以得到一系列基本性质. 取 $M^{2n+1}=\mathbb{R}^{2n+1}$ (扩展相空间),坐标为$(p_1, \cdots, p_n, q_1, \cdots, q_n, t)$. 设有一个哈密顿函数 $H(p, q, t)$. 由此构造1形式:

$$\omega^1=pdq-Hdt,\ (pdq=p_1dq_1+\cdots+p_ndq_n).$$

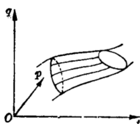


图 1-2

在$(2n+1)$维扩展相空间中考虑1形式$\omega^1=pdq-Hdt$. 容易看出, 此形式的涡线可以由函数$p=p(t)$, $q=q(t)$给出, 这些函数满足方程(1.3). 这样的表达式本身就意味着相轨线和其在$t$轴上的投影有1-1对应关系. 实际上, $pdq-Hdt$的微分是

$$d\omega^1=\sum_{i=1}^{n}\left(dp_i\wedge dq_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i\wedge dt-\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i\wedge dt\right).$$

这个微分2形式对应的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & -I & H_p\\ I & 0 & H_q\\ -H_p & -H_q & 0\end{pmatrix},$$

其中$I$是$n$阶单位矩阵. 这个矩阵的秩是$2n$, 所以$d\omega^1$是非退化的. 容易验证$A$相应于特征值0的特征向量是$(-H_q,\ H_p,\ 1)$. 这说明1-形式$pdq-Hdt$的涡线方向是$(-H_q,\ H_p,\ 1)$, 同时它也是方程(1.3)定义的流的方向, 所以(1.3)的积分曲线就是涡线. 此线的切向在$t$轴的投影始终为1.

**定理4** 设两个闭曲线环绕同一个由方程(1.3)的相轨线构成的涡管, 那么1-形式$pdq-Hdt$在这两个闭曲线上的积分是相同的:

$$\oint_{\gamma_1}pdq-Hdt=\oint_{\gamma_2}pdq-Hdt.$$

此1形式称为庞加莱-康托积分不变量.

**证明** 注意到相轨迹和1形式$pdq-Hdt$的涡线相同, 应用引理2即得.

作为一种特殊情况, 考虑一个等时闭曲线$\gamma$, 即$\gamma$在$t=\text{const}$的超平面内. 随着相流$f^t$, 此曲线被变换成$f^t\gamma$. 由上述定理, 可得如下推论:

**推论** 哈密顿相流保持1形式$pdq$在闭曲线上的积分.

这个 1 形式 $pdq$ 称为庞加莱相对积分不变量. 由它也可以推出哈密顿流保持辛结构不变.

以上考虑了一些哈密顿动力系统具有的积分不变量. 我们知道, 并不是所有辛流形上都有全局哈密顿函数. 辛流形$(X, \Omega)$上的向量场 $\xi$ 具有全局哈密顿函数 $H$, 意味着 $dH=\xi^b$. 这里 $\cdot^b$ 是"平坦"映射: $TX\to T^*X$, 向量场 $\xi\in TX$ 在映射 $\cdot^b$ 之下的象是 1 形式, 它作用在另一向量场的取值是 $\xi^b(\eta)=\Omega(\xi, \eta)$. 为了衡量辛动力系统偏离哈密顿系统有多远, 我们引入 Calabi 不变量的概念. 对连续时间系统而言, $X$ 上总有一个局部哈密顿向量场 $\xi$, 根据定义, $-\xi^b=-i_\xi\Omega$ 是一个闭的 1 形式($i_\xi$ 是内积运算), 因而相应于一个上同调类 $C_a(\xi)=[-\xi]^b\in H^1(X, \mathbb{R})$. 这称为系统的 **Calabi 不变量**. 一个辛动力系统是哈密顿动力系统的充分必要条件是 Calabi 不变量为零. 对于离散时间系统, 即对辛映射 $f^t(t\in\mathbb{Z})$, 定义形式稍有不同. 设 $X$ 是具有正合辛结构的辛流形, $\Theta$ 是其刘维尔形式. 考虑局部微分同胚 $f$: $U\to X$, $U$ 是 $X$ 中的开集. 由于 $f$ 是辛映射, $f^*\Theta-\Theta|_U$ 必然是闭的, 因而可以通过 $f^*\Theta-\Theta$ 所在的上同调类定义 Calabi 不变量.

$$C_a(f)=[f^*\Theta-\Theta|_U]\in H^1(U, \mathbb{R}). \tag{4.6}$$

在一般情况下, 这个量依赖于 $\Theta$ 的选择. 注意即使辛结构是正合的, 即 $\Omega=-d\Theta$, 刘维尔形式也不能由 $\Omega$ 唯一决定. 它们之间可以相差一个闭的 1 形式. 但是如果 $f$ 光滑同伦于零, $C_a(f)$与 $\Theta$ 的选择无关. 这里"光滑同伦于零"的意思, 是存在一族光滑映射 $f_s$: $U\to X$, $s\in[0, 1]$, $f_0$ 是 $U\to X$ 的包含映射 $f_1=f$. 实际上, 如果 $\Theta_1$、$\Theta_2$ 是两个产生同一辛结构的刘维尔形式, $\lambda=\Theta_1-\Theta_2$ 是闭 1 形式

$$\frac{d}{ds}f_s^*\lambda=i_\xi d\lambda+d(i_\xi\lambda), \qquad \left(\xi=\frac{d}{ds}f_s\right)$$

$$f_0^*\lambda=\lambda|_U.$$

由于 $d\lambda=0$,

$$f^*\lambda - \lambda|_U = \int_0^1 d(i_\xi\lambda)ds = d\int_0^1 (i_\xi\lambda)ds.$$

这说明 $f^*\Theta_i - \Theta_i$ 只相差一个函数的微分.

如上两种对不同系统而定义的 Calabi 不变量是有紧密联系的. 简单起见, 我们仅考虑一个特殊系统: $U = \mathbb{T}^n \times D$, $X = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, $D$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个单连通开集. 上面装备的辛结构可以由 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的辛结构 $dp\wedge dq$ 通过包含映射而得到商辛结构. 考虑一个局部哈密顿向量场 $\xi$, 它定义在 $\mathbb{T}^n \times \widetilde{D}$ 上, $\widetilde{D} \supset \overline{D}$ 是一个开集, 因而存在一个确定的局部哈密顿流 $f^t$: $U \to \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, $|t| \leqslant \delta(\delta > 0)$, 这构成了一个同伦于恒等映射的局部微分同胚. 在这样的记号下, 我们有:

$$C_a(f^t) = tC_a(\xi|_U). \tag{4.7}$$

**证明** $$\frac{d}{dt}(f^{t*}\Theta) = f^{t*}(i_\xi d\Theta) + df^{t*}(i_\xi\Theta).$$

从 0 列 $t$ 积分:

$$f^t\Theta - \Theta|_U = -\int_0^t (f^t)^*\xi^b dt + d\int_0^t f^{t*}(i_\xi\Theta)dt.$$

在从闭形式到上同调类的映射[ ]下,

$$C_a(f^t) = -\int_0^t [f^{t*}\xi^b]dt. \tag{4.8}$$

再一次运用外形式微分公式:

$$\frac{d}{dt}(f^{t*}i_\xi\Omega) = i_\eta d(i_\xi\Omega) + d(i_\eta i_\xi\Omega). \qquad \left(\eta = \frac{d}{dt}f^t\right)$$

再积分, 得

$$[f^{t*}\xi^b] = [\xi^b] = -C_a(\xi). \tag{4.9}$$

(4.7)式由(4.8)式与(4.9)式得到.

为了了解 Calabi 不变量的几何意义, 我们考虑一个简单的例子.

设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是一开集. 取一向量值函数 $\psi$: $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$, 周期为 1. 定义局部微分同胚 $f$: $\mathbb{T}^n \times D \to \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$\tilde{f}(\varphi, I) = (\varphi_i, I_i + \psi_i(\varphi^i), 1 \leqslant i \leqslant n),$$

这里 $\varphi$ 是角变量坐标, $I$ 是作用量坐标. 显然, $f$ 是辛映射, 光滑

同伦于零. $\mathbb{T}^n\times D$ 上的辛结构的刘维尔形式是 $\Theta=-\sum_{i=1}^{n}I_i d\varphi^i$. 由此很容易计算它的 Calabi 不变量:

$$C_a(f)=\int_0^1\psi(\varphi)d\varphi.$$

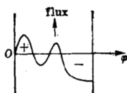


图 1-3

图 1-3 显示当 $n=1$ 时的情形. Calabi 不变量的值相当于 $s_0$ 与 $f(s_0)$ 围成的面积的代数和. $s_0$ 是 $I=0$ 构成的一个圈. 这时 $C_a(f)$ 表示了在 $I$ 方向上每次迭代 $f$ 而引起的面积流量. 在高维情况下, 这个流量是向量值.

## §5 庞加莱截面

本节的主要任务是建立连续时间哈密顿系统与离散系统之间的联系. 通过这种方式, 可以将研究较高维哈密顿向量场的任务转化为研究较低维的辛映射. 特别是在研究不变集附近的动力行为时, 这种方法特别有用.

取 $A\subset X$ 是流形 $X$ 的一个子集, $\xi$ 是 $X$ 上的光滑向量场. 固定 $x\in A$, 记 $s(t)$ 是向量场 $\xi$ 经过 $x$ 的最大积分曲线($t\in\Delta$), 即 $s(0)=x$, $\Delta$ 尽可能大. 有三种可能性: (i) $x\in Z(\xi)$, 向量场的零点. 这时对所有 $t\in\Delta=\mathbb{R}$ 有 $s(t)=x$; (ii) $x\notin Z(\xi)$, $s(\Delta\cap(0,\infty))\cap A=\varnothing$ (尤其是当 $x\in\partial A\cap X, \xi_x\neq 0$ 指向 $A$ 的外面); (iii) 存在 $\tau>0$, 使得 $s(\tau)\in A$, 而当 $0<\tau'<\tau$ 时 $s(\tau')\notin A$. 我们以如下方式定义集合 $A$ 相对于向量场 $\xi$ 的回归时间函数 $\tau$: $A\to\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$,

$$\tau(x)=\begin{cases}0 & \text{类型(i)},\\ +\infty & \text{类型(ii)},\\ \tau & \text{类型(iii)}, \tau \text{ 如上面所定义}.\end{cases}$$

现在设$X$是辛流形，$\xi$是$X$上的哈密顿向量场，$H$是相应的哈密顿函数，具有能量$E$的等能曲面是$H^{-1}(E)=\{x\in X,\ H(x)=E\}$. 考虑$X$的一个子集$M$，它满足下列条件：

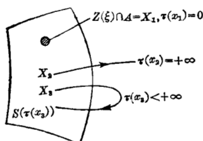



图 1-4

(i) 对某一个$E\in\mathbb{R}$, $M\subset H^{-1}(E)$;

(ii) $M\cap Z(\xi)=\varnothing$;

(iii) $M$是$\xi$的不变集，并且是完全的，即当$x(0)\in M$时，$s(t)$对$t\in\mathbb{R}$都有定义.

$X$中$(2n-2)$维辛子流形$S$称为$M$的庞加莱截面，如果它满足下列条件：

(iv) $\partial S\cap M=\varnothing$, $S\cap Z(\xi)=\varnothing$, $S\cap M\neq\varnothing$;

(v) $S\subset H^{-1}(E)$;

(vi) 集合$K=S\cap M$在$S$中有一个开邻域$U$，回归时间函数$\tau$在$K$中取正有限值，并且光滑；

(vii) 在$H^{-1}(E)$中向量场$\xi$横截$S$，这表示对所有$x\in S$，$T_xH^{-1}(E)=T_xS\oplus L_x$，其中$L_x$是由$\xi$产生的$T_xX$的一维子空间. 注意$H^{-1}(E)$不必一定是子流形，但$H^{-1}(E)\backslash Z(\xi)$是子流形，因而$T_xH^{-1}(E)$有意义，

(viii) $M$中任一点$x$都位于某个正轨道$O_y^+=\{s(t),\ t\geqslant 0,\ s(0)=y\in K=M\cap s\}$.

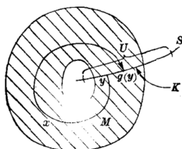



图 1-5

取$\xi$是$X$上的哈密顿向量场，$H$是相应的哈密顿函数，$M$满足(i)、(ii)、(iii)，$S$是$M$的庞加莱截面. 对每个$x\in U$，$U$满足条件(vi)，都有在$X$中的邻域$W$使得存在$\xi$的局部流$f^t\colon W\to X$，它定义在区间$\tau(x)-\varepsilon<t<\tau(x)+\varepsilon, \varepsilon>0$，$\tau\colon U\to\mathbb{R}$是集合$U$上的时间回归函数. 定义庞加莱映射$g\colon U\to S$:

$$g(x)=f^{\tau(x)}(x),\ x\in U. \tag{5.1}$$

显然，集合 $K=S\cap M$ 是映射 $g$ 的不变集.

**定理1** 哈密顿流的庞加莱映射是辛映射.

**证明** 设 $f^t: W\to X$ 是 $\xi$ 的局部流，$W'=W\cap S$. 我们要证明的是 $g|_{W'}$ 保持辛结构. 首先设 $X$ 的辛结构 $\Omega$ 是正合的，即 $\Omega=d\Theta$，$\Theta$ 是 1 形式. 根据外微分求导公式，

$$\frac{d}{dt}(f^{t*}\Theta)=d(i_\xi\Theta\circ f^t)+f^{t*}dH. \tag{5.2}$$

记从 $X$ 中等能量面 $H^{-1}(E)$ 到 $X$ 的包含映射为 $j_E$. 由于 $H^{-1}(E)$ 关于 $f^t$ 是不变的，

$$(j_E|_W)^*\circ f^{t*}=(f^t|_{\widetilde{W}})^*\circ j_E^*, \tag{5.3}$$

其中 $\widetilde{W}=W\cap H^{-1}(E)$，以及

$$j_E^*dH=0. \tag{5.4}$$

对(5.2)式两端作用算子 $j_E^*$，并利用(5.3)、(5.4)式，得到

$$\frac{d}{dt}(f^{t*}\Theta_1-\Theta_1)=dj_E^*((i_\xi\Theta)\circ f^t), \tag{5.5}$$

其中 $\Theta_1=j_E^*\Theta$. 现在我们在 $H^{-1}(E)$ 内考虑问题. 在集合 $\widetilde{W}=W\cap H^{-1}(E)$ 上定义函数：$\tilde{\tau}(x)$ 是使得 $f^t(x)\in S$ 的最小正 $t$. 可以看出，如果 $x\in U$，$\tilde{\tau}(x)=\tau(x)$；$h(x)=\int_0^{\tilde{\tau}(x)}i_\xi\Theta\circ f^t(x)dt$，这是一个实值函数；$k(x)=\int_0^{\tilde{\tau}(x)}d(i_\xi\Theta)\circ f^t(x)dt$，这是 1 形式；$\tilde{g}(x)=f^{\tilde{\tau}(x)}(x)$，这是从 $\widetilde{W}$ 到 $S$ 的映射，显然 $\tilde{g}|_{W'}=g|_{W'}$.

利用通常的对积分求导公式，可得：

$$dh=(i_\xi\Theta\circ\tilde{g})d\tilde{\tau}+k. \tag{5.6}$$

根据下式定义线性映射 $\mathscr{F}$，它把 $H^{-1}(E)$ 上的 1 形式转移为 $\widetilde{W}$ 上的 1 形式

$$\mathscr{F}\alpha(x)=(f^{\tilde{\tau}(x)*}\alpha)(x).\quad \alpha\in\Omega^1(H^{-1}(E)),\ x\in\widetilde{W}$$

对 $H^{-1}(E)$ 上的任意 1 形式 $\alpha$，

$$\tilde{g}^*\alpha=\mathscr{F}\alpha+(i_\xi\alpha)\circ\tilde{g}d\tilde{\tau}. \tag{5.7}$$

实际上,如果 $x\in\widetilde{W}$, $v\in T_xH^{-1}(E)$,

$$T_x\widetilde{g}(v)=T_xf^t(v)|_{t=\widetilde{\tau}(x)}+d\widetilde{\tau}(v)\cdot\xi\circ g(x).$$

将 $\alpha$ 作用在上式两端,便可得到(5.7)式.

有了以上准备工作,我们再考虑(5.5)式.从点 $x\in\widetilde{W}$ 起始,在 $t\in[0,\ \widetilde{\tau}(x)]$ 积分,可得

$$\mathscr{F}\Theta_1-\Theta_1=k. \tag{5.8}$$

由(5.6)至(5.8)式,可得

$$\widetilde{g}^*\Theta_1-\Theta_1=dh.$$

两端作用外微分算子 $d$, 得到 $\widetilde{g}$ 保持 $j_E\Omega$. 这说明 $\widetilde{g}|_{W'}=g|_W$ 保持了 $\Omega|_{T^*S}$.

对于 $\Omega$ 不是正合的情况,如果 $g(x_0)\neq x_0$, 我们可以考虑一段 $\{f^t(x_0),\ -\delta\leqslant t\leqslant\tau(x_0)+\delta,\ \delta>0\}$的一个管状邻域. 而当 $g(x_0)=x_0$ 时, 可以考虑闭圈$\{f^t(x_0),\ 0\leqslant t\leqslant\tau(x_0)\}$的管状区域. 在前者情况下,这样一个邻域是单连通的,因此辛结构必然是正合的. 而在后一种情况下,可以将证明转移到闭圈的管状邻域的通有覆盖流形上去.

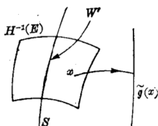


图 1-6

利用庞加莱截面,可以将连续时间哈密顿系统的周期轨进行分类.

设 $M$ 是向量场$(X,\ \xi)$的周期轨, $H$ 是相应的哈密顿量. 因为在 $M$ 上 $H$ 取常值,所以存在 $E\in\mathbb{R}$, 使 $M\subset H^{-1}(E)$. 选定任意一个 $x_0\in M$, 取$(2n-2)$维辛子流形 $S$, 它具有性质(i)$S\subset H^{-1}(E)$; (ii)只在一点相交于 $M$, 记为 $x_0$; (iii)在 $H^{-1}(E)$内与向量场 $\xi$ 横截. 这样一个 $S$ 是庞加莱截面. 在这种情况下, $K$ 只是一个点$\{x_0\}$. 为了证明确实存在这样的 $S$, 我们取一个含有 $x_0$ 的辛坐标卡,在此坐标卡内, $x_0$ 相应于原点, $M$ 在此局部坐标系定义域内部分被映射到 $q^1$ 轴. 这样的选择显然是可能的. 在所选的坐标系内,

$$\dot{q}^j=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_j}\Big|_M=0 \quad (j\geqslant 2),$$

$$\dot{p}_j=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_j}=0, \quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

因而在 $M$ 的邻域内 $H$ 的泰勒展式有如下形式：

$$H(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)=E+\frac{\partial H}{\partial p_1}(q^1, 0, \cdots, 0)p_1+\text{高阶项}.$$

注意在 $x\in M$ 处 $dH\neq 0$, 因为 $x$ 不是不动点. 因此 $\frac{\partial H}{\partial p_1}(q^1, 0, \cdots, 0)\neq 0$, 在 $x_0$ 处的等能量面的切空间由向量 $\frac{\partial}{\partial q^i}(1\leqslant i\leqslant n)$, $\frac{\partial}{\partial p_j}(2\leqslant j\leqslant n)$生成. 取任一 $H^{-1}(E)$的$(2n-2)$ 维子流形 $\tilde{S}\ni x_0$, 使得 $T_{x_0}\tilde{S}$ 是由 $\frac{\partial}{\partial q^j}$、$\frac{\partial}{\partial p_j}$ $(2\leqslant j\leqslant n)$ 生成的. 在 $\tilde{S}$ 内存在一个 $x_0$ 的开邻域 $S$, 它是辛子流形, $x_0$ 是唯一与 $M$ 相交的点. 这样, $T_{x_0}H^{-1}(E)=T_{x_0}M\oplus T_{x_0}S$. 这保证了在 $x_0$ 处的横截性条件. 取 $S$ 足够小, 使得 $S$ 上处处与向量场 $\xi$ 横截相交. 这个 $S$ 就是庞加莱截面. 通过这样方式, 可将研究在周期轨道附近的相流行为转化为研究在不动点 $x_0$ 附近局部辛微分同胚 $g$: $U\to S$ 的动力行为.

在不动点附近充分小邻域内微分同胚的动力行为, 可以由其不动点处的切映射来反映. 考虑切映射 $T_{x_0}g$: $T_{x_0}S\to T_{x_0}S$, 这是 $S_p(T_{x_0}S)$中的一元素. 根据 $T_{x_0}g$ 是双曲型或是椭圆型或是混合型, 而称周期轨是相应的类型. 比较特殊的情况是二自由度哈密顿系统. 它在周期轨附近的庞加莱映射或是双曲型或是椭圆型.

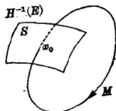



图 1-7

以上的求找庞加莱映射的过程, 是将连续哈密顿系统化为离散系统. 这个过程也可以反过来, 得到的连续系统称为**扭扩哈密顿系统**. 这里从略.

## §6 完全可积哈密顿系统

在庞加莱以前，大部分研究哈密顿系统的工作集中在寻找积分。如果有充分多的相互独立的首次积分，那么此系统就是可积的．对于一个 $2n$ 阶常微分方程，我们知道，如果能够找到 $2n$ 个独立的首次积分，则方程的求解就只剩下代数工作了．由于有哈密顿结构，对 $n$ 个自由度哈密顿系统，我们将在稍后看到，不必寻找 $2n$ 个独立的首次积分，而可以少得多．从动力学角度来看，可积系统是非常简单的，各种可能的运动都很规则．不幸的是可积系统非常稀少，加上一点扰动，可积性就会被破坏．然而，研究这种系统仍然是很重要的，因为经常遇到的系统是可积系统加小扰动．

首先简要概述一下哈密顿函数及向量场的李代数．所谓李代数，是一个向量空间 $L$，并且装备了双线性、反对称算子 $L\times L\to L$，满足雅可比恒等式：

$$[[A,\ B],\ C]+[[B,\ C],\ A]+[[C,\ A],\ B]=0.$$

设 $X$ 是光滑流形，$\xi$ 是 $X$ 上的向量场．由此可以定义向量场 $\xi$ 的李导数 $L_\xi$: $C(X,\ \mathbb{R})\to C(X,\ \mathbb{R})$，$X$ 上的可微函数 $\varphi$ 关于向量场 $\xi$ 的李导数是 $\varphi$ 在方向 $\xi$ 上的导数

$$(L_\xi\varphi)(x)=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\varphi(\xi^t x),$$

其中 $\xi^t$ 是由向量场 $\xi$ 生成的单参数变换群．如果在 $X$ 上定义有两个向量场 $\xi$、$\eta$，相应地，可以有两个李导数算符 $L_\xi$ 和 $L_\eta$．由此可以定义一个新的线性微分算子 $L_\eta L_\xi-L_\xi L_\eta$．这需要下列引理：

**引理** 算子 $L_\eta L_\xi-L_\xi L_\eta$ 是线性微分算子．

**证明** 这只需要在局部坐标系下证明即可．设 $(U,\ \varphi)$ 是 $M$ 的一个坐标卡，局部坐标系是 $(x_1,\ \cdots,\ x_n)$．在此坐标系中，$L_\xi$ 和

$L_\eta$ 的表示式分别是

$$L_\xi=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i},\qquad L_\eta=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

容易算出:

$$(L_\xi L_\eta-L_\eta L_\xi)\varphi=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\xi_i\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}-\eta_i\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}.$$

既然 $L_\eta L_\xi-L_\xi L_\eta$ 是线性微分算子, 由对偶关系, 它一定对应于某一向量场 $\zeta$. 这样就导出向量场 $\xi$ 和 $\eta$ 的泊松括号的定义:

**定义 1** 流形上两个向量场 $\xi$ 和 $\eta$ 的泊松括号是一个向量场 $\zeta$, 使得

$$L_\zeta=L_\xi L_\eta-L_\eta L_\xi.$$

记为 $\zeta=[\xi,\eta]$.

在局部坐标系下, 向量场 $\zeta$ 的分量有如下表示式:

$$\zeta_i=\sum_{j=1}^{n}\left(\eta_j\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}-\xi_j\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}\right).$$

显然, 以如上方式定义的泊松括号使得流形 $X$ 上的向量场成为一个李代数. 为了证明这一结论, 只需要证明雅可比恒等式.

$$\begin{aligned}L_{[[\xi,\eta],\zeta]}&=L_\zeta L_{[\xi,\eta]}-L_{[\xi,\eta]}L_\zeta\\&=L_\zeta L_\eta L_\xi-L_\zeta L_\xi L_\eta+L_\xi L_\eta L_\zeta-L_\eta L_\xi L_\zeta.\end{aligned}$$

再将 $L_{[[\eta,\zeta],\xi]}$, $L_{[[\zeta,\xi],\eta]}$ 展开, 一共有 12 项, 每两项一样, 符号相反, 代数和正好为 0.

记向量场 $\alpha$、$\beta$ 生成的流是 $a^t$, $b^t$.

**定理 1** 两个流 $a^t$ 与 $b^t$ 交换的充分必要条件是相应的两个向量场 $\alpha$ 与 $\beta$ 的泊松括号为 0.

**证明** 容易验证, 对 $X$ 上任一光滑函数 $\varphi$,

$$\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\bigg|_{s=t=0}\{\varphi(a^tb^sx)-\varphi(b^sa^tx)\}=(L_{[\alpha,\beta]}\varphi)(x)=0.$$

由此可以得到

$$\varphi(a^tb^sx)=\varphi(b^sa^tx).$$

注意这是对任意 $\varphi$ 都成立, 定理得证.

现在考虑两个函数的泊松括号. 设$(X, \Omega)$是$2n$维辛流形. 给定$X$上的函数$H: X\to\mathbb{R}$, 我们就得到一个单参数变换群$f_H^t$: $X\to X$, 它是由$H$对应的哈密顿向量场$IdH$而产生的流. 设$F$是$X$上另一函数.

**定义 1** 辛流形$(X, \Omega)$上两函数$F$和$H$的泊松括号, 是$F$在哈密顿向量场$IdH$方向的导数:

$$(F, H)(x)=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}F(f_H^t(x)).$$

因此, 两个函数的泊松仍然是一函数.

**推论** 函数$F$是哈密顿流$f_H^t$的首次积分的充分必要条件是$(F, H)\equiv 0$.

在§4中我们曾经定义过函数的微分与哈密顿向量场之间的同构关系$I$,

$$\Omega(\eta, I\theta)=\theta(\eta),$$

$\theta$是1形式, 例如$\theta=dH$. 所以$F$与$H$的李括号等于1形式$dF$作用在向量场$IdH$,

$$(F, H)=dF(IdH).$$

也等于2形式$\Omega$作用在二向量场$IdH$、$IdF$,

$$(F, H)=\Omega(IdH, IdF).$$

不难验证, 在此泊松括号下, $X$上的函数构成李代数.

在辛流形上, 两函数的泊松括号与此两函数的微分所确定的哈密顿向量场的泊松括号有密切关系:

**定理 2** 记$B$与$\Gamma$是由函数$\beta$与$\gamma$决定的哈密顿向量场. $[B, \Gamma]$也是哈密顿向量场, 其哈密顿函数正好是$\beta$和$\gamma$的泊松括号.

**证明** 置$[B, \Gamma]=D$, 由雅可比等式,

$$[A, D]=[[A, B], \Gamma]-[[A, \Gamma], B].$$

所以
$$L_D=L_\Gamma L_B-L_B L_\Gamma,$$

$$L_D=L_{[B, \Gamma]}.$$

**定理 3** 如果辛流形$(X, \Omega)$上的哈密顿函数$H$关于由$F$确定的哈密顿流$f_F^t$不变，则$F$是由$H$确定的哈密顿系统的首次积分.

由于哈密顿系统的这一系列特殊性质，具有$n$个自由度的哈密顿系统可以只由$n$个独立首次积分的存在性而决定其可积性. 注意到这相应于$2n$阶常微分方程，在一般情况下只有在找到$2n$个独立首次积分后问题才算解决. 这就是刘维尔关于可积系统的定理.

**定义 2** 如果辛流形上两个函数$F_1$与$F_2$的泊松括号恒为零，称此两函数对合.

刘维尔证明了对于一个$n$自由度哈密顿系统，如果存在$n$个对合的但相互独立的首次积分，则此系统可以通过求已知函数的积分而求解. 具体形式如下：

**定理 4** 设在$2n$维辛流形$X$上存在$n$个对合的首次积分：

$$F_1, \cdots, F_n, \qquad (F_i, F_j) \equiv 0. \qquad i, j=1, 2, \cdots, n.$$

记$F_i(i=1, 2, \cdots, n)$的等值面$M_g$，

$$M_g = \{x: F_i(x) = g_i, \ i=1, 2, \cdots, n\}.$$

设$F_i$在$M_g$相互独立，即在$M_g$上的每一点，$n$个1形式$dF_i$线性独立，那么

(i) $M_g$是一个光滑流形，关于由哈密顿函数$H=F_1$决定的哈密顿流不变；

(ii) 如果$M_g$是紧连通的，那么它同胚于$n$维环面$T^n=\{(\varphi_1, \cdots, \varphi_n), \bmod 2\pi\}$；

(iii) 在$M_g$上的哈密顿流$f_H^t$是拟周期的，即若用角变量坐标$\varphi=(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$表示，则有

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega, \qquad \omega=\omega(g).$$

(iv) 具有哈密顿函数$H$的正则方程可以用对已知函数求积分的方法求解.

由于要求 $dF_i$ 在 $M_g$ 上相互独立 $(1\leqslant i\leqslant n)$，由隐函数定理，$M_g$ 确实是 $2n$ 维辛空间中的 $n$ 维流形. 而且，在此流形 $M_g$ 上存在 $n$ 个可交换的但是线性独立的向量场. 事实上，由算子 $I$，我们得到 $X$ 上 $n$ 个向量场 $IdF_i$(这里 $1\leqslant i\leqslant n$). 根据定理 2，这些向量场也是交换的. 这同时也说明 $F_i$ 在向量场 $dF_j$ 上的异数为零$(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$. 换一种说法，$IdF_i$ 相切于 $M_g$. 这样，我们已经证明了 $M_g$ 关于 $n$ 个交换的哈密顿流 $f^t_{F_i}$ 的不变性：$f^t_{F_i}\cdot f^s_{F_j}=f^s_{F_j}\circ f^t_{F_i}$，$M_g$ 并且是 $X$ 的拉格朗日流形. 因为 $(F_i,\ F_j)=\Omega(IdF_i,\ IdF_j)=0$.

作为第二步，我们假设 $M_g$ 紧连通. 根据上面的证明，$M_g$ 是光滑的 $n$ 维紧连通流形. 由于在 $M_g$ 上有 $n$ 个两两交换、线性独立的向量场，因而 $M_g$ 同胚于一个 $n$ 维环面 $\mathbb{T}^n$.

为了看清这一点，记 $f^t_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 是相应于 $M_g$ 上给定的 $n$ 个向量场生成的单参数微分同胚群. 由于向量场交换，$f^t_i$ 之间也交换. 所以我们可以在 $M_g$ 上定义一个交换群 $\mathbb{R}^n=\{\tau\}$ 的作用：

$$f^\tau\colon M_g\to M_g,\qquad f^\tau=f_1^{\tau_1}\circ f_2^{\tau_2}\circ\cdots\circ f_n^{\tau_n}.$$

$$(\tau=(\tau_1,\ \tau_2,\ \cdots\tau_n)\in\mathbb{R}^n)$$

显然 $f^{\sigma+\tau}=f^\sigma\circ f^\tau$. 如果固定 $x_0\in M_g$，我们便得到一个映射

$$f\colon\mathbb{R}^n\to M_g,\qquad f(\tau)=f^\tau x_0.$$

$x_0$ 首先沿着 $f_1^{\tau_1}$ 的轨道运动，然后再沿着 $f_2^{\tau_2}$ 的轨道，等等. 因为这些流交换，所以不论以怎样的次序，最终的点是唯一的. 由于 $M_g$ 是紧连通的，易见 $f\colon\mathbb{R}^n\to M_g$ 是映上的，但不是 1-1 对应的. 定义集合 $\Gamma=\{\tau\in\mathbb{R}^n,\ f^\tau x_0=x_0\}$. $\Gamma$ 显然是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个子群，并且不依赖于 $x_0$. 事实上，由于 $f^\tau$ 是映上的，对任意 $x_1\in M_g$，存在 $\sigma\in\mathbb{R}^n$，使 $x_1=f^\sigma x_0$. 若 $\tau\in\Gamma$，即 $f^\tau x_0=x_0$，这时 $f^\tau x_1=f^{\tau+\sigma}x_0=f^\sigma x_0=x_1$. 注意到这 $n$ 个向量场都没有奇点(根据 $dF_i$ 的线性独立性)，$\Gamma$ 还是一个离散子群. 既然 $\Gamma$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的离散子群，存在 $\mathbb{R}^n$ 中的 $k$ 个$(0\leqslant k\leqslant n)$线性独立向量 $e_1,\ \cdots,\ e_k\in\Gamma$ 使得 $\Gamma$ 就是

这些向量的整数线性组合.

考虑 $k$ 个圆周与 $n-k$ 条直线的乘积

$$\mathbb{T}^k\times\mathbb{R}^{n-k}=\{(\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_k;\ y_1,\ \cdots,\ y_{n-k})\}\quad \varphi \bmod 2\pi$$

以及从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{T}^k\times\mathbb{R}^{n-k}$ 的自然映射 $p$

$$p(\varphi,\ y)=(\varphi \bmod 2\pi,\ y).$$

$\mathbb{R}^n$ 中的点 $f_1,\ \cdots,\ f_k(f_i=(0,\ \cdots\varphi_i=2\pi,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ 被映射到 0 点. 取生成子群 $\Gamma$ 的 $k$ 个生成子 $e_1,\ \cdots,\ e_k$, 可以看出, 存在 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 的同构映射 $A$, 使 $A(f_i)=e_i,\ 1\leqslant i\leqslant k$. 这样, 我们得到 $\mathbb{T}^k\times\mathbb{R}^{n-k}$ 的坐标卡 $\mathbb{R}^n=\{(\varphi,\ y)\}$、$M_g$ 的坐标卡$\{\tau\}$. 于是, 可以通过下列交换图, 定义 $\mathbb{T}^k\times\mathbb{R}^{n-k}\to M_g$ 的映射 $\widetilde{A}$

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n=\{(\varphi,\ y)\} & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n=\{\tau\}\\ p\downarrow & & \downarrow f\\ \mathbb{T}^k\times\mathbb{R}^{n-k} & \xrightarrow[\widetilde{A}]{} & M_g\end{array}$$

显然, $\widetilde{A}$ 是一个微分同胚. 由于 $M_g$ 是紧的, $k=n$. 这样, 我们同时也得到了 $M_g$ 上的 $n$ 个角变量坐标$(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_n)$. 注意到对 $(t,\ 0,\ \cdots,\ 0)\in\mathbb{R}^n$ 有唯一的线性组合式

$$(t,\ 0,\ \cdots,\ 0)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i e_i t,\tag{6.1}$$

因此角变量 $\varphi$ 关于由哈密顿向量场 $IdF_1$ 决定的方程就是

$$\dot{\varphi}_i=\omega_i,\qquad \varphi(t)=\varphi(0)+\omega t.$$

到此为止, 我们已经证明了定理 4 的大部分结论, 除去方程可以用对已知函数求积分的方程求解这一结论.

现在我们的目标是找到辛坐标系$(I,\ \varphi)$, $\varphi$ 即是如上 $M_g$ 上的角变量而使得首次积分 $F$ 只依赖于变量 $I$, 一般称之为作用变量. 由方程(1.4)得到:

$$\dot{I}=\frac{\partial F_1}{\partial\varphi}=0,\quad \dot{\varphi}=\frac{\partial F_1}{\partial I}=\omega(I).$$

因此

$$I(t)=I(0),\quad \varphi(t)=\varphi(0)+\omega(I_0)t.$$

这就说明哈密顿方程通过求已知函数积分而全部解决，从而完成刘维尔定理的全部证明.

构造 $M_g$ 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 相空间中的一个开邻域. 让 $\tilde{g}$ 取遍中心在 $g$ 的 $n$ 维开球 $B$. 注意到 $M_{\tilde{g}}=\{x\in\mathbb{R}^{2n}: F_i=\tilde{g}_i\}$, $dF_i$ 线性独立, 如果 $\tilde{g}_1\neq\tilde{g}_2$ 便有 $M_{\tilde{g}_1}\cap M_{\tilde{g}_2}=\varnothing$. 若取 $\varphi$ 为 $M_g$ 上的角变量坐标, $(g,\varphi)$ 构成了 $M_g$ 附近的一个坐标系. 这表示 $\bigcup\limits_{\tilde{g}\in B}M_{\tilde{g}}$ 微分同胚于 $\mathbb{T}^n\times\mathbb{B}$. 在坐标系 $(g,\varphi)$ 之下, 由哈密顿函数 $F_1$ 决定的相流可以用非常简单的 $2n$ 阶常微分方程表示:

$$\frac{dg}{dt}=0;\quad \frac{d\varphi}{dt}=\omega(g),$$

其中 $\omega$ 如(6.1)式所定义.

所以, 要用求已知函数的积分这一方法求解正则方程组(1.3), 我们只需要寻找 $\varphi$ 的具体表达式. 而这一点也只需要通过代数和求已知函数积分的手段来达到. 当然, 在一般情况下, $(g,\varphi)$ 不是辛坐标, 但是可以找到函数 $I=I(g)$, $I=(I_1, I_2, \cdots, I_n)$ 使 $(I,\varphi)$ 是辛坐标. 这时的辛结构就是 $\Omega=dI\wedge d\varphi=\sum\limits_{i=1}^{n}dI_i\wedge d\varphi_i$.

为了构造这样的作用-角变量坐标, 我们首先研究只有一个自由度的哈密顿系统. 在一般情况下, 一对共轭变量记为 $(p, q)$, $H=H(p,q)$. 这样的系统具有一个首次积分即能量积分 $H$. 按照定理的要求, 对 $h\in\mathbb{R}$, $H=h$ 是一个紧连通曲线 $M_h$. 由此可以按照如下步骤寻找作用-角变量坐标:

$$I=I(h),\quad \oint_{M_h}d\varphi=2\pi. \tag{6.2}$$

为此引入母函数 $S(I, q)$, 以期利用解方程

$$p=\frac{\partial S(I,q)}{\partial q},\quad \varphi=\frac{\partial S(I,q)}{\partial I},$$

$$H\left(\frac{\partial S(I,\ q)}{\partial q},\quad q\right)=h(I) \tag{6.3}$$

而得到$(I,\ q)$. 设函数$h(I)$是可逆的, 因此每一个曲线$M_h$都可以由$I$决定。所以,对固定的$I$,根据(6.3)式,可得

$$dS\bigg|_{I=\text{const}}=pdq.$$

这决定了在曲线$M_{h(I)}$上的一个微分1形式$dS$. 沿着此曲线对此1形式积分,我们便得到一个函数

$$S(I,\ q)=\int_{q_0}^{q}pdp.$$

这便是作为变换(6.3)的母函数. 在$(I,\ q_0)$附近, (6.2)的第一条显然是满足的. 为了验证第二条, 沿着回路$M_{h(I)}$积分一周, 得到

$$\Delta S(I)=\oint_{M_{h(I)}}pdq.$$

这相当于由曲线$M_{h(I)}$围成的面积. 因此$S$在$M_{h(I)}$上是多值函数,相差积分面积的整数倍,这对$\frac{\partial S}{\partial q}$没有影响,但导致了对$\varphi=\frac{\partial S}{\partial I}$的定义影响,这看来相差$\frac{d\Delta S(I)}{dI}$的整数倍. 不过这正说明了角变量性质. 为了满足(6.2)式的第二个条件,我们需要

$$\frac{d}{dI}\Delta S(I)=2\pi,\qquad I=\frac{\Delta S}{2\pi}=\frac{A}{2\pi},$$

其中$A=\int_{M_h}pdq$是由曲线$H=h$围成的区域之面积. 根据假设$\frac{dA}{dh}\neq 0$, 所以$h(I)$的逆$I(h)$是存在的. 这就得到了由母函数$S(I,\ q)=\int_{q_0}^{q}pdq$定义的正则变换(6.3),满足(6.2).

根据单自由度哈密顿系统寻找作用-角变量的经验,我们现在来建立作用-角变量坐标系. 研究对象自然是具有$n$个自由度的

哈密顿系统 $H=H(p, q)$. 现在 $p$、$q$ 均是向量. 此系统定义在欧几里德空间 $\mathbb{R}^{2n}$ 内. 根据条件, 存在 $n$ 个独立的首次积分 $F_1=H$, $F_2$, $\cdots$, $F_n$, 他们自然是对合的. 类比单自由度的情况, 选择作用变量 $2\pi I=\oint pdq$.

取 $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\cdots$, $\gamma_n$ 是在 $n$ 维环面 $M_g$ 上一维圈的基, 即绕 $\gamma_i$ 一圈, $\varphi_i$ 增加 $2\pi$ 而 $\varphi_j(i\neq j)$ 不增加. 置

$$I_i(g)=\frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_i} pdq, \tag{6.5}$$

这样做的根据是 $I_i$ 的取值不依赖于 $\gamma_i$ 的选择. 实际上我们已经证明 $M_g$ 是拉格朗日流形, 因此 2 形式 $dp\wedge dq$ 在 $M_g$ 上任一 2 链上的积分始终为 0. 取 $\gamma'$ 是另一个一维圈, 具有相同的伦型, $\gamma-\gamma'$ 就可以是一个二维区域的边界. 根据斯托克斯公式:

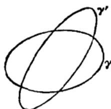


图 1-8

$$\oint_{\gamma}-\oint_{\gamma'} pdq=\oint_{\sigma} dp\wedge dq=0.$$

由(6.5)式确定的量 $I_i(g)$ 称为作用变量.

设对于给定的 $n$ 个首次积分 $F_i$ 的值 $g_i$, $n$ 个量 $I_i$ 互相独立, 即 $\det\left(\frac{\partial I}{\partial g}\right)\Big|_g\neq 0$, 于是在环面 $M_g$ 附近可以取$(I, \varphi)$为局部坐标系. 这样, 我们有结论: 变换$(p, q)\to(I, \varphi)$是正则的, 即

$$\sum dp_i\wedge dq_i=\sum dI_i\wedge d\varphi_i.$$

为了证明这一点, 考虑在 $M_g$ 上的微分 1 形式 $pdq$. 我们知道, $M_g$ 是一个拉格朗日流形, 因而此形式在 $M_g$ 上必然是闭的, 因为它的外导数 $\Omega=dp\wedge dq$ 在 $M_g$ 上恒为 0. 所以, 积分

$$S(x)=\int_{x_0}^{x} pdq|_{M_g}$$

并不因积分路径改变而改变. 所以, $S(x)$ 是 $M_g$ 上的多值函数, 每绕一周积分而得到的值是

$$\Delta_i S = \int_{\gamma_i} dS = 2\pi I_i.$$

取 $x_0$ 是 $M_g$ 上的一点，其邻域内 $q$ 是 $M_g$ 上的局部坐标系使得 $M_g \subset \mathbb{R}^{2n}$ 是由 $n$ 个方程 $p=p(I, q)$，$q(x_0)=q_0$ 决定的. 在 $q_0$ 的一个单连通邻域内可以定义一个单值函数

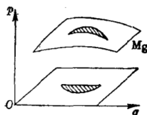


图 1-9

$$S(I, q)=\int_{q_0}^{q} p(I, q)dq,$$

并用此函数作为正则变换

$$p=\frac{\partial S}{\partial q}, \quad \varphi=\frac{\partial S}{\partial I}$$

的母函数. 这个母函数实际上在 $M_g$ 的一邻域内定义了这样一个变换. 坐标 $\varphi$ 是多值的,

$$\Delta_i \varphi_j = \Delta_i \frac{\partial S}{\partial I_j} = 2\pi\delta_{ij}.$$

我们知道,角变量本来就是多值的.

到此为止，我们看到作用-角变量的寻求只是经过代数方法(求反函数)以及求已知函数积分的方法而得到. 在作用-角变量坐标下,哈密顿方程被转化为

$$\dot{I}=\frac{\partial H}{\partial \varphi}=0, \qquad \dot{\varphi}=\frac{\partial H}{\partial I}(I).$$

因而

$$I(t)=I(0), \qquad \varphi(t)=\frac{\partial H}{\partial I}(I(0))t+\varphi(0).$$

即方程(1.3)的求解被代数和求已知函数积分的方法所解决,这就完全证明了刘维尔定理.

［例］ 简谐振子的哈密顿函数

$$H=\frac{a^2}{2}p^2+\frac{b^2}{2}q^2.$$

对任意 $h\in\mathbb{R}^+$, $H(p, q)=h$ 确定了一个椭圆. 它所围的区域面积

$$A(h)=\pi(\sqrt{2h}/a)(\sqrt{2h}/b)=2\pi h/ab=2\pi h/\omega.$$

$\omega$ 是简谐振子的固有频率. 因此, 对简谐振子而言, 作用量是能量与频率之比, 角变量当然是振子的相位.

# 第2章

# KAM 理 论

## §7 经典的 KAM 理论

考虑具有 $n$ 个自由度的哈密顿系统. 根据刘维尔定理(参见本书第 31 页),如果该系统具有 $n$ 个独立的对合的首次积分,这 $n$ 个函数确定的等值面是紧的且连通, 那么这个等值面同胚于 $n$ 维环面,这个环面关于哈密顿流不变,在环面上的流是拟周期流. 基于这层考虑,我们经常研究变量为作用量及角变量的哈密顿系统,$H=H(I,\varphi)$, $I=(I_1, \cdots, I_n)$为作用量, $\varphi=(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$为角变量.

显然,最简单的哈密顿系统莫过于可积系统. 这时, $2n$ 维相空间分层为一族 $n$ 维不变环面, 在每个环面上系统的运动是拟周期运动. 这时的哈密顿函数只依赖于作用变量 $H=H(I)$, 其运动方程为

$$\dot{I}=0, \quad \dot{\varphi}=\frac{\partial H}{\partial I}=\omega(I). \tag{7.1}$$

它的解是 $I(t)=I(0)$, $\varphi(t)=\omega t+\varphi(0)$. 拟周期运动的频率由 $\omega(I)$决定. $\omega(I)$决定了一个由作用量空间到频率空间的映射.

本世纪以前,许多数学力学家穷其毕生精力去寻找正则变换,以图将一般哈密顿系统变换为一个可积形式. 但是,人们现在已经明白,可积系统极其稀少,寥若晨星. 如果能够直接研究不可积系统,自然是很理想的,但是现有的手段还十分有限,得到的结果很少. 在这种情况下,研究可积系统的扰动,无疑是一种可行的方法. 其实,自然界的许多现象都可以用一种近可积哈密顿系统来描述. 在这一方面,产生于本世纪 50、60 年代的 KAM 理论是哈密

顿系统研究理论发展的里程碑．它使太阳系的稳定性得到合理解释，并使人们重新以审慎的眼光来看待统计力学中一系列观点和猜测．

在叙述这一理论之前，我们首先研究一下拟周期运动的频率（也称为旋转向量）．对于一个旋转向量 $\omega=(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$，我们通常按照下列规则将其分为三类：

（i）满足无理性条件（Diophantine 条件）．如果存在正数 $D(\omega)>0$，使得

$$|\langle k, \omega\rangle|=\left|\sum_{j=1}^{n} k_j\omega_j\right|\geqslant D(\omega)|k|_1^{-\mu} \tag{7.2}$$

对所有非零整数向量 $k=(k_1, \cdots, k_n)$ 成立．其中

$$|k|_1=|k_1|+|k_2|+\cdots+|k_n|,\ \mu>n-1.$$

（ii）满足共振性条件．存在一个非零整数向量 $k$ 使得

$$\langle k, \omega\rangle=0. \tag{7.3}$$

（iii）刘维尔向量．不满足以上两条件者．

**定理 1** 在 $n$ 维欧几里德空间 $\mathbb{R}^n$ 中，几乎所有向量满足 Diophantine 条件．

注意，(7.2)式中的 Diophantine 常数 $D(\omega)$ 并非关于 $\omega$ 一致，它依赖于 $\omega$．若固定一个充分小的 $D$，我们只能得到一个充分接近全测度的正测集，在此集中(7.2)式对于选定的 $D>0$ 成立．

**证明** 只需要证明对 $\mathbb{R}^n$ 中任意有界区域 $\Omega$，在 $\Omega$ 中不满足(7.2)式的点 $\omega$ 的集合是勒贝格零测度集．

对任何 $\varepsilon>0$，及固定的非零整数向量 $k$，在 $\Omega$ 中满足

$$|\langle k, \omega\rangle|\leqslant\varepsilon|k|_1^{-\mu}$$

的集合记为 $\Omega(\varepsilon, k)$．考虑两个平行的 $(n-1)$ 维超平面

$$P_1:\ \langle k, \omega\rangle=\varepsilon|k|_1^{-\mu},$$

$$P_2:\ \langle k, \omega\rangle=-\varepsilon|k|_1^{-\mu}.$$

显然，$\Omega(\varepsilon, k)$ 在此两超平面之间．取

$$|k|_\infty=\max\{|k_1|, |k_2|, \cdots, |k_n|\}.$$

此二平行超平面的距离

$$d\leqslant\frac{2\varepsilon}{|k|_\infty}|k|_1^{-\mu}.$$

由于有关系式

$$\sum_{|k|_\infty=r}1\leqslant 2n(2r+1)^{n-1}$$

$$|k|_\infty\leqslant|k|_1\leqslant n|k|_\infty$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}\text{meas}(\Omega(\varepsilon, k))\leqslant\text{meas}(\Omega)4\varepsilon h\sum_{r=1}^{\infty}(2r+1)^{n-1}r^{-(\mu+1)}$$

meas 表示勒贝格测度. 由于 $\mu>n-1$, 上述级数收敛. 让 $\varepsilon\to 0$, 便得到定理的证明.

考虑一个近可积的哈密顿系统,其哈密顿函数为

$$H(I, \varphi)=N_0(I)+P_0(I, \varphi). \tag{7.4}$$

其中 $I=(I_1, I_2, \cdots, I_n)$是作用量, $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$是角变量, $N_0(I)$满足柯尔莫哥洛夫非退化条件

$$\det\left(\frac{\partial^2 N_0}{\partial I^2}\right)\neq 0, \tag{7.5}$$

$P_0$ 充分小. 如果没有非可积扰动, 即 $P_0=0$, 此系统是可积的. 它的解具有非常简单的形式

$$I(t)=I(0),\ \varphi(t)=\varphi(0)+\frac{\partial N_0}{\partial I}(I_0)t.$$

注意到 $\varphi$ 是角变量, 整个相空间被分层为一族不变环面 $I=\text{const.}$, 在每一不变环面上哈密顿相流是拟周期的, 频率 $\omega=\frac{\partial N_0}{\partial I}$. 当 $P_0$ 存在时, 在一般情况下可积性遭到破坏. 对于一般系统, 若没有哈密顿结构, 我们知道当扰动存在时, 所有的不变环面都可能被破坏. 例如二阶线性常微分方程中心情况, 在标准形式下椭圆型不动点被一族连续的周期轨道所包围. 而当有扰动时, 在一般情况下所有的周期轨道都可能被破坏. 然而, 对于哈密顿系统, 柯尔莫哥洛夫在本世纪 50 年代提出一个非常令人惊讶的

结果[25]. (7.4)式中扰动项的出现并不能全部破坏未受扰系统的不变环面. 与之相反,大部分的不变环面仍然存在,在这些环面上的哈密顿流仍然是拟周期流,这些流的频率满足 Diophantine 条件(7.2). 阿诺德(V. I. Arnold)在本世纪 60 年代成功地完成了当(1.4)为解析函数时的证明[3]. 莫泽(J. K. Moser)证明了扭转保面积映射的不变曲线存在性[87],他使用了纳什-莫泽技巧,使得这一结论在映射具有 $C^{333}$ 可微性时便可以成立. 后面将看到,可微性对不变环面存在性具有非常重要的影响.

**定理 2**(经典KAM 定理) 设哈密顿系统(7.4)满足如下条件:

(i) $H(I, \varphi)$在区域 $\Sigma_0$ 上实解析:

$$\Sigma_0:\ |\mathrm{Im}\,\varphi|<t,\ |I-I_0|\leqslant s;$$

(ii) 柯尔莫哥洛夫非退化性;

(iii) 满足 Diophantine 条件:

$$\left|\left\langle\frac{\partial N_0}{\partial I}(I_0),\ k\right\rangle\right|\geqslant D|k|_1^{-\mu}. \qquad \forall k\in\mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$$

对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $d=d(\varepsilon, D, \mu, s, t)>0$, 如果在 $\Sigma_0$ 内 $|P_0|<d$, 那么方程

$$\dot{\varphi}=\frac{\partial H}{\partial I},\ \dot{I}=-\frac{\partial H}{\partial\varphi} \tag{7.6}$$

定义的哈密顿流具有一个 $n$ 维不变环面

$$\begin{aligned}I&=I_0+\Gamma(\Phi),\\ \varphi&=\Phi+\Theta(\Phi),\end{aligned} \tag{7.7}$$

其中 $\Gamma$ 与 $\Theta$ 是在复域 $|\mathrm{Im}\,\Phi|\leqslant\frac{t}{2}$ 上周期为 $2\pi$ 的实解析函数. 此不变环面上的流可由下式描述

$$\Phi=\Phi_0+\frac{\partial H}{\partial I}(I_0)t.$$

而且,这样的不变环面充分接近于原可积系统的相应不变环面.

$$|\Gamma|+|\Theta|<\varepsilon.$$

在给出证明梗概之前，我们首先看一下此定理意味着什么．假设 $N_0(I)$ 在开集 $U$ 上实解析．对充分小但是固定的常数 $D_0$（不依赖于 $\omega$），由定理 1 的证明，可以看出有一个充分接近于 $U$ 的勒贝格测度的正测集 $U_1\subset U$，在 $U_1$ 上不仅(7.2)式成立，而且相应的 Diophantine 常数 $D(\omega)\geqslant D_0$．如果 $I_0\in U_1$，在小扰动 $|P_0|<d$ 下，相应的不变环面仍然存在．这个集合 $U_1$ 是一个康托集，当 $d\to 0$ 时，此集合的测度趋向于 $U$ 的测度，但是我们永远得不到全测度．注意，在上述讨论中我们利用了柯尔莫哥洛夫非退化性条件．

定理 2 的证明比较复杂，这里不给出全部的证明，仅描述一个证明梗概．证明的基本技巧是采用牛顿迭代法，构造一个辛变换 $M_k$ 的无穷序列：

$$M_k:\ \Sigma_k\to\Sigma_{k-1},$$

其中 $\Sigma_k=\{(I,\varphi):|\operatorname{Im}\varphi|\leqslant t_k,\ |I-I_k|\leqslant s_k\}$，$(s_0,t_0)=(s,t)$，$t_k<t_{k-1}$，$s_k<s_{k-1}$，$\lim\limits_{k\to\infty}s_k=0$，$\lim\limits_{k\to\infty}t_k=\frac{t}{2}$，$\lim\limits_{k\to\infty}I_k=I_\infty$．在变换 $M_k$ 之下，定义在 $\Sigma_{k-1}$ 上的哈密顿函数 $H_{k-1}=N_{k-1}(I)+P_{k-1}(I,\varphi)$ 被变换成定义在 $\Sigma_k$ 上的函数

$$H_k(I,\varphi)=H_{k-1}\circ M_k=N_k(I)+P_k(I,\varphi).$$

在 $\Sigma_k$ 上，$P_k$ 及其梯度的模要比 $P_{k-1}$ 及其梯度在 $\Sigma_{k-1}$ 上的模小得多．这种收敛速度是超指数的：

$$|P_k|\leqslant|P_{k-1}|^{1+k},\quad k>0.$$

如果 $|P_0|$ 足够小，此种辛变换的无穷序列

$$M_0,\ M_1,\ \cdots,\ M_k,\ \cdots$$

的复合在 $\Sigma_\infty=\left\{(I,\varphi):\ |\operatorname{Im}\varphi|\leqslant\frac{t}{2},\ I=I_\infty\right\}$ 上收敛，

$$T_\infty=\prod_{k=0}^{\infty}\mu_k:\ \Sigma_\infty\to\Sigma_0$$

其切映射将 $\Sigma_\infty$ 上的向量场 $\{\dot\varphi=\omega,\ \dot I=0\}$ 映射到 $\Sigma_0$ 上由(7.6)式定义的向量场．这意味着

$$T_\infty(\omega t+\varphi_\infty,\ I_\infty)=\Phi_0^t(T_\infty(\varphi_\infty,\ I_\infty)),\tag{7.8}$$

其中$(\varphi_\infty,\ I_\infty)\in\mathrm{Re}(\Sigma_\infty)$，$\Phi_0^t$是(7.6)式定义的哈密顿流．(7.8)式实际上表明下图交换：

$$\begin{array}{ccc}\Sigma_\infty & \xrightarrow{\ \omega t\ } & \Sigma_\infty\\ {\scriptstyle T_\infty}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_\infty}\\ \Sigma_0 & \xrightarrow{\ \Phi_0^t\ } & \Sigma_0\end{array}$$

因此$T_\infty(\mathrm{Re}(\Sigma_\infty))$是(7.6)式所定义的哈密顿系统的一个不变环面，上面的流仍然是频率为$\omega$的拟周期流．

如何构造变换$M_k$是证明的关键，它具有较高的技巧性．现在说明如何构造．设哈密顿函数

$$H(I,\ \varphi)=N(I)+P(I,\ \varphi)$$

在区域$\Sigma=\{(I,\ \varphi);\ |\mathrm{Im}\,\varphi|\leqslant\tau,\ |I-I^*|\leqslant s\}$上实解析，并且有$\sup|P|\leqslant d$，$d$为一个小正数．取$\Sigma_+=\{(I_+,\ \varphi_+);\ |\mathrm{Im}\,\varphi_+|\leqslant\tau_+,\ |I_+-I_+^*|\leqslant s_+\}$，$(\tau_+<\tau,\ s_+<s)$，我们希望找到一个变换$M$：$\Sigma_+\to\Sigma$，在此变换下

$$H\circ\mu(I_+,\ \varphi_+)=N_+(I_+)+P_+(I_+,\ \varphi_+).$$

此变换使得$P_+|\ll|P|$．为了不致引起混淆，我们用$(I,\ \varphi)$表示定义在$\Sigma$上的作用及角变量，而用$(I_+,\ \varphi_+)$表示定义在$\Sigma_+$上的作用及角变量．选取$I^*$和$I_+^*$，使

$$\frac{\partial N}{\partial I}(I^*)=\frac{\partial N_+}{\partial I_+}(I_+^*)=\omega.$$

注意到由于具有柯尔莫哥洛夫非退化性，$\dfrac{\partial N}{\partial I}$是一个局部微分同胚．下面将看到$N_+$只是$N$加上$P$关于$\varphi$的平均项，因而$\dfrac{\partial N_+}{\partial I_+}$仍然是局部微分同胚，所以上式成立．由于哈密顿系统是近可积系统，因此所期待的辛变换是接近于恒等变换的．设此变换$M$由母函数$\langle I_+,\ \varphi\rangle+W(I_+,\ \varphi)$所确定：

$$I=I_++W_\varphi,\ \varphi=\varphi_++W_{I_+}.\tag{7.9}$$

在新变量$(I_+, \varphi_+)$之下，哈密顿函数具有下列形式

$$H=N_+(I_+)+P_+(I_+, \varphi_+),$$

其中

$$N_+(I_+)=N(I_+)+[P(I_+)],$$

$$P_+(I_+, \varphi_+)=M_1+M_2+M_3+M_4,$$

$$[P]=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi} P(I_+, \varphi)d\varphi,$$

$$M_1=\langle\omega, W_\varphi\rangle+P(I_+, \varphi)-[P(I_+, \rho)],$$

$$M_2=N(I_++W_\varphi)-N(I_+)-\left\langle\frac{\partial N}{\partial I}(I_+), W_\varphi\right\rangle,$$

$$M_3=\left\langle\frac{\partial N}{\partial I}(I_+)-\omega, W_\varphi\right\rangle,$$

$$M_4=P(I, \varphi)-P(I_+, \varphi).$$

$W(I_+, \varphi)$由方程$M_1=0$的解决定. 为了求解此方程:

$$\langle\omega, W_\varphi\rangle=[P(I_+, \varphi)]-P(I_+, \varphi), \tag{7.10}$$

设$W$与$P$均可以展开成傅里叶级数:

$$W=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} W_k(I_+)e^{i\langle k,\varphi\rangle},$$

$$[P(I_+, \varphi)]-P(I_+, \varphi)=-\sum_{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} P_k(I_+)e^{i\langle k,\varphi\rangle}.$$

(7.10)的形式解为

$$W(I_+, \varphi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}\frac{iP_k(I_+)e^{i\langle k,\varphi\rangle}}{\langle\omega, k\rangle}. \tag{7.11}$$

为了证明$W$在一定的区域之内是实解析函数，下面的一些技术性引理是必要的.

**引理** 设周期为$2\pi$的函数$f(\varphi)$在$|\mathrm{Im}\,\varphi|\leqslant\rho$上解析,

$$f(\varphi)=\sum_k f_k e^{i\langle k,\varphi\rangle},$$

(i) 如果在区域$|\mathrm{Im}\,\varphi|<\rho$内$|f(\varphi)|\leqslant M$, 则

$$|f_k|\leqslant Me^{-|k|\rho};$$

(ii) 如果$|f_k(\varphi)|\leqslant Me^{-|k|\rho}$, $\omega$满足 Diophantine 条件(7.2), 在区域$|\mathrm{Im}\varphi|\leqslant\rho-\delta(0<\delta<\rho<1)$内有下列估计:

$$\left|\sum_k \frac{iP_k}{\langle\omega, k\rangle} e^{i\langle k,\varphi\rangle}\right| \leqslant C_1 M D^{-1}\delta^{-(\mu+n)}, \tag{7.12}$$

其中 $C_1$ 是仅依赖于 $\mu$、$n$ 的正常数.

从现在开始, 我们总是用 $C_i$ 表示仅依赖于 $\mu$ 和 $n$ 的正常数, 否则将特别表明.

**证明** 为了证明(i), 我们取如下的围道积分 $(0, 0)\to(2\pi, 0)\to(2\pi, i\rho)\to(0, i\rho)\to(0, 0)$. 在此围道内, 函数解析. 另一方面,

$$f_k = (2\pi)^{-n}\int_0^{2\pi} f(\varphi)e^{-i\langle k,\varphi\rangle}d\varphi.$$

为证明(ii), 我们注意到在区域 $|\mathrm{Im}\,\varphi| \leqslant \rho-\delta$ 内,

$$\left|\sum_k \frac{iP_k}{\langle\omega, k\rangle} e^{i\langle k,\varphi\rangle}\right| \leqslant \sum_k MD^{-1}|k|_1^{\mu} e^{-|k|_1\delta}.$$

由于 $\sum\limits_{|k|_1=r} 1 \leqslant 2^n(2r+1)^{n-1}$, 所以

$$\sum_{|k|_1=r} 1 \leqslant 2^{2n} MD^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} m^{\mu+n-1}e^{-m\delta} \leqslant C_1 MD^{-1}\delta^{-(\mu+n)}.$$

应用引理可知, 当 $(I, \varphi)$ 限制在区域

$$\left\{|\mathrm{Im}\,\varphi| \leqslant \tau - \frac{\tau-\tau_+}{8}\right\}\times\{|I-I^*| \leqslant s\}$$

时, $W(I, \varphi)$ 是实解析函数, 它的模满足下列估计:

$$|W| \leqslant C_2 MD^{-1}(\tau-\tau_+)^{-(\mu+n)} = \theta. \tag{7.13}$$

定义介于 $\Sigma$ 与 $\Sigma_+$ 之间的三个中间区域.

$$\Sigma_1 = \left\{|\mathrm{Im}\,\varphi| \leqslant \tau - \frac{\tau-\tau_+}{2}\right\}\times\left\{|I-I^*| \leqslant s - \frac{s-s_+}{2}\right\};$$

$$\Sigma_2 = \{|\mathrm{Im}\,\varphi| \leqslant \tau_+\}\times\{|I-I^*| \leqslant 3s_+\};$$

$$\Sigma_3 = \{|\mathrm{Im}\,\varphi| \leqslant \tau_+\}\times\{|I-I^*| \leqslant 2s_+\}.$$

注意到估计解析函数导数上界的柯西方法: 设函数 $f(z)$ 在圆盘 $|z-z_0| \leqslant r$ 上解析, 且 $|f(z)| \leqslant M$, 那么

$$|f'(z_0)| \leqslant \frac{M}{r}, \quad |f''(z_0)| \leqslant \frac{2M}{r^2},$$

收缩区域$\left\{|\operatorname{Im}\varphi|\leqslant\tau-\frac{\tau-\tau_+}{8}\right\}\times\{|I-I^*|\leqslant s\}$到$\Sigma_1$后，我们有下列估计

$$\max\{|W_I|,\ |W_\varphi|\}\leqslant C_3\theta\max\{(\tau-\tau_+)^{-1},\ (s-s_+)^{-1}\},$$
$$\max\{|W_{I^2}|,\ |W_{I\varphi}|,\ |W_{\varphi^2}|\}$$
$$\leqslant C_3\theta\max\{(\tau-\tau_+)^{-2},\ (s-s_+)^{-2}\}.$$

从$\theta$的表达式可以看出，只要$d$满足关系式

$$d\leqslant C_4D(\tau-\tau_+)^{\mu+n}\min\{(\tau-\tau_+)^{-2},\ (s-s_+)^{-2}\},\qquad(7.14)$$

变换(7.9)($(I_+,\ \varphi_+)\to(I,\ \varphi)$)将区域$\Sigma_1$映入$\Sigma_2$，且(7.9)式可以写成显式$I_+=I_+(I,\ \varphi)$，$\varphi_+=\varphi_+(I,\ \varphi)$. 同时得到估计：

$$|M-id|\leqslant C_3\theta\max\{(\tau-\tau_+)^{-1},\ (s-s_+)^{-1}\},\qquad(7.15)$$
$$|M'-I|\leqslant C_5\theta\max\{(\tau-\tau_+)^{-2},\ (s-s_+)^{-2}\},\qquad(7.16)$$

其中$id$是恒等映射，$M'$是$M$的雅可比矩阵，$I$是单位阵. 详细推导可见[19].

由于关于变量$(I_+,\ \varphi_+)$有关函数在$\Sigma_2$上解析，在$\Sigma_2$内我们可以得到$|P_+|$的上界估计：

$$|M_2|\leqslant C_5|W_\varphi|^2,$$
$$|M_3|\leqslant C_5s_+|W_\varphi|,$$
$$|M_4|\leqslant C_5|P'||W_\varphi|.$$

当然$M_1=0$，综合这些估计：

$$|P_+|\leqslant C_6D^{-1}d(\tau-\tau_+)^{-(\mu+n+1)}\{d(\tau-\tau_+)^{-(\mu+n+1)}+s_+\}$$
$$=d_+.\qquad(7.17)$$

收缩$\Sigma_2$到$\Sigma_3$，利用柯西技巧，我们得到

$$|P_+|\leqslant d_+,\quad |P'_+|\leqslant\frac{d_+}{s_+},\quad |P''_+|\leqslant\frac{2d_+}{s_+^2}.\qquad(7.18)$$

现在考虑新的主部$N+N_+$. 在一般情况下，显然有

$$\frac{\partial}{\partial I}(N+N_+)|_{I_+=I^*}\neq\omega.$$

但是由于$N$满足柯尔莫哥洛夫非退化性条件，方程

$$\frac{\partial}{\partial I_+}(N+N_+)=\omega$$

在 $I^*$ 的 $\delta$ 邻域里必定有解(记作 $I_+^*$), 其中

$$\delta=\frac{2d}{|\lambda|},$$

$\lambda$ 是 $N$ 的 Hessian 矩阵的绝对值最小的特征值. 在后面我们将看到,

$$\delta<s_+. \tag{7.19}$$

于是 $\Sigma_+\subset\Sigma_3$. 所以, (7.18)式在 $\Sigma_+$ 上也成立. 以这种方式我们构造了一次近恒等辛变换, 选取适当的迭代关系, 我们进而可以构造所需求的无限次变换.

按照开始给出的条件取迭代关系. 对于第 $m$ 步迭代, 取

$$\tau_m=\frac{\tau_0}{2}\left(1+\frac{1}{2m}\right),\quad s_m=d_m^{\frac{1}{3}},\quad d_{m+1}=d_m^{\frac{7}{6}}.$$

为了使迭代能够反复进行, 最重要的是验证关系式(7.17)所定义的 $d_{m+}\leqslant d_{m+1}$. 实际上, 若以 $\tau_m$, $\tau_{m+1}$, $d_m$, $d_{m+1}$, $s_{m+1}$ 分别代替(7.17)中的 $\tau$, $\tau_+$, $d$, $d_+$, $s_+$, 则有

$$\begin{aligned} d_{m+}&=C_6D^{-1}d_m\tau_0^{-(\mu+n+2)}2^{(\mu+n+1)(m+2)}\\ &\quad\times\{d_m\tau_0^{-(\mu+n+1)}2^{(\mu+n+1)(m+2)}+d_{m+1}^{\frac{1}{3}}\}\\ &=C_6D^{-1}\tau_0^{-(\mu+n+1)}2^{(\mu+n+1)(m+2)}\\ &\quad\times\{d_m^{\frac{5}{6}}\tau_0^{-(\mu+n+1)}2^{(\mu+n+1)(m+2)}+d_m^{\frac{1}{6}}\}d_{m+1}. \end{aligned} \tag{7.20}$$

由于 $d_m$ 以超指数速度收敛于 0, 而上式中 $d_{m+1}$ 的系数中趋于无穷大的因子只是以指数速度增长, 因此只要取 $d_0$ 充分小(当然依赖于 $\tau_0$、$\mu$ 和 $n$), $d_{m+1}$ 的系数就可以小于 1. 当然, $d_0$ 的选取不仅由关系式(7.20)决定, 而且还需使得(7.14)和(7.19)式成立. 但无论如何, 一个正常数 $d=d(n, D, \mu, s, t)$ 总是存在的, 它满足以上所有的要求.

还有一个重要的问题必须解决，这就是如上方法得到的一系列变换的复合是否收敛．实际上，由(7.15)和(7.16)我们得到 $T_m=\prod_{k=0}^{m}M_k$ 以及导映射 $T'_m$ 在 $\Sigma_\infty=\left\{|\mathrm{Im}\,\varphi|\leqslant\frac{\tau_0}{2}\right\}\times\{I=I_\infty\}$ 上一致收敛，因而 $H\circ T_\infty$ 是 $\Sigma_\infty$ 上的实解析函数，并且(7.8)式成立．这就证明了经典的 KAM 理论．注意(7.8)式的成立与否并不显然，但是我们从关系式 $|P_{m+1}|\leqslant|P_m|^{\frac{7}{6}}$ 看出，哈密顿系统 $H\circ T_\infty$ 在环面 $I=I^*_\infty$ 上可积．我们所需要证明的只是映射 $T_\infty$ 及其切映射 $T'_\infty$ 确实把环面 $I=I^*_\infty$ 映成一个稍微扭曲变形的环面，并且把 $I=I^*_\infty$ 上的向量场 $\dot{I}=0$, $\dot{\varphi}=\omega$ 映成 $T_\infty(I^*_\infty)$ 上由方程(7.6)定义的切向量场．有关详细证明可见文献[3]、[19]．

由于变换 $T_\infty$ 接近于恒等变换，所以 $T_\infty\{I=I^*_\infty\}$ 是一个接近于 $I=I^*_\infty$ 的稍被扭曲的环面．对任意 $\varepsilon>0$，总可以限制 $d=d(\varepsilon, D, \mu, s, t)>0$，使

$$|\Gamma|+|\Theta|<\varepsilon.$$

从 KAM 定理的证明过程可以看出，Diophantine 关系起着很重要的作用．如果 $\omega$ 不满足 Diophantine 条件，稍后我们将看到，相应的不变环面在一般情况下将不复存在．即使 $\omega$ 满足某一 Diophantine 条件，但相应的 Diophantine 常数 $D$ 却相当小，这时相应的不变环面也不存在．要使其存在，必须减小 $d$．由于 $\mathbb{R}^n$ 中所有满足 Diophantine 条件的点的 Diophantine 常数的下确界是 0，所以对任意充分小的扰动，不变环面依然存在的集合只能是一个正测的康托集．注意到不满足 Diophantine 条件的点是处处稠密的，我们不难理解以前试图在椭圆型不动点附近将哈密顿系统变换为可积形式的努力为什么无效．

J. Pöschel 在 1982 年得到一个结果[44]，指出尽管在小扰动下 KAM 环面构成一个康托环面集 $S$，即此集是由一族环面组成此集和 $n$ 维超平面 $\{\varphi=\mathrm{const}\}$ 的交集是通常意义下的康托集，但是可以通过修改哈密顿函数 $H(I, \varphi)$ 而得到一个新的函数 $H^*(I, \varphi)$，

在 $S$ 上两者取值相同 $H^*(I, \varphi)=H(I, \varphi)|_S$, 由 $H^*(I, \varphi)$ 定义的哈密顿系统是一个可积系统.

## §8 低维不变环面

在§7讨论了具有KAM形式的哈密顿系统

$$H=N(I)+P(I, \varphi)$$

的不变环面的存在性. 在那里, 系统具有 $n$ 个自由度, 不变环面的维数也是 $n$, 这称为最高维的不变环面. KAM理论是说对于这样一个最高维的不变环面, 如果上面拟周期流的频率 $\omega$ 满足 Diophantine 条件, 则这样的环面能够承受一定的扰动. 现在我们考虑低维不变环面在小扰动下的存在性.

首先看问题如何提出. 考虑自治哈密顿系统, 其哈密顿函数 $H(z)$ 是一个在原点附近解析的函数, $z=(z_1, z_2, \cdots, z_{2n})$. 如果

$$H(z)=H^{(2)}(z)+\cdots+H^{(i)}(z)+\cdots,$$

其中 $H^{(i)}$ 是 $i$ 阶齐次项, 那么原点是哈密顿系统

$$\dot{z}=JH_z(z) \tag{8.1}$$

的平衡点. 如果 $H^{(2)}(z)=\frac{1}{2}\langle z, Az\rangle$, 在原点附近的线性化系统就是

$$\dot{z}=JAz. \tag{8.2}$$

众所周知, $JA$ 的特征值以一对对的形式出现 $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \cdots, \pm\alpha_n$, [51] 设这些特征值以下列方式排列:

$$\mathrm{Re}\,\alpha_\varkappa=0, \quad 1\leqslant\varkappa\leqslant k;$$

$$\mathrm{Re}\,\alpha_{k+\lambda}>0, \quad 1\leqslant\lambda\leqslant l.$$

记 $\alpha_\varkappa=i\sigma_\varkappa$, $1\leqslant\varkappa\leqslant k$. 设 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$ 互不相同, 且不具有4阶之内的共阶关系:

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} j_\varkappa\alpha_\varkappa\neq 0. \qquad \forall j=(j_1, \cdots, j_k),\ 1\leqslant|j|_1\leqslant 4$$

利用线性辛变换,可以引入新的坐标

$$u=(u_1, u_2, \cdots, u_k),\quad v=v(v_1, v_2, \cdots, v_k),$$

$$p=(p_1, p_2, \cdots, p_l),\quad q=(q_1, q_2, \cdots, q_l),$$

使得 $H^{(2)}(z)$ 具有如下形式

$$\sum_{k=1}^{k}\frac{\sigma_\varkappa}{2}(u_\varkappa^2+v_\varkappa^2)+\langle p, \Omega q\rangle,$$

其中 $\Omega$ 是 $l\times l$ 矩阵,满足条件

$$\mathrm{Re}\langle\nu, \Omega\nu\rangle\geqslant\lambda|\nu|,\qquad \forall\nu\in C^l \quad (8.3)$$

$\lambda>0$. 利用 G. Birkhoff 的方法以及 $\langle j, \sigma\rangle\neq 0$, $1\leqslant|j|\leqslant 4$ 的假设,可以找到一个非线性辛变换[19],使变换后的哈密顿函数线性部分不变,而高阶项则成为规范型.如果仍记新变量为 $u$、$v$、$p$、$q$,哈密顿函数便具有如下形式

$$\sum_{\varkappa=1}^{k}\sigma_\varkappa y_\varkappa+\langle p, \Omega q\rangle+\frac{1}{2}\sum_{\varkappa,\varkappa'=1}^{k}\tau_{\varkappa\varkappa'}y_\varkappa y_{\varkappa'}+K(u, v, p, q).$$

$$(8.4)$$

其中 $2y_\varkappa=(u_\varkappa^2+v_\varkappa^2)$, $\tau=(\tau_{\varkappa\varkappa'})$ 是实 $k\times k$ 阶矩阵, $K$ 是不低于5次的高阶项. 在原点附近, $K$ 可以被认为是如下哈密顿系统的扰动

$$\sum_{\varkappa=1}^{k}\sigma_\varkappa y_\varkappa+\langle p, \Omega q\rangle+\frac{1}{2}\sum_{\varkappa,\varkappa'=1}^{k}\tau_{\varkappa\varkappa'}y_\varkappa y_{\varkappa'}.$$

若考虑哈密顿方程,相应的线性化方程是

$$\dot{u}_\varkappa=\sigma_\varkappa v_\varkappa,\qquad \dot{v}_\varkappa=-\sigma_\varkappa u_\varkappa,\qquad 1\leqslant r\leqslant k$$

$$\dot{p}=\Omega^T p,\qquad \dot{q}=-\Omega^T q.$$

这个方程组显然具有一族有界解:

$$u_\varkappa(t)=\mathrm{Re}(c_\varkappa e^{\sigma_\varkappa t}),\ v_\varkappa=\mathrm{Im}(C_\varkappa e^{i\sigma_\varkappa t}),$$

$$C_\varkappa^2=u_\varkappa^2(0)+v_\varkappa^2(0),\quad 1\leqslant\varkappa\leqslant k,$$

$$p=0,\quad q=0. \qquad (8.5)$$

引入坐标 $x'_\varkappa$、$y_\varkappa$(这里 $1\leqslant\varkappa\leqslant k$),使 $u_\varkappa+iv_\varkappa=\sqrt{2y_\varkappa}e^{ix_\varkappa}$. 每一个这样的解可以视为 $k$ 维不变环面 $2y_\varkappa=e_\varkappa(1\leqslant\varkappa\leqslant k)$, $p=q=0$ 在 $\mathbb{R}^{2k+2l}$ 中的嵌入. 这里的嵌入映射就是包含映射. 所谓的不变,

是指相应于克罗内克(L. Krouecker)流 $\dot{x}_\varkappa=\sigma_\varkappa$ 而言．这些解显然不具有李维普诺夫稳定性，因为(8.3)意味着 $\Omega$ 的特征值具有正实部，相应于这 $l$ 个特征值是 $k+l$ 维流形 $M_+$，任何一解从此流形上出发，当 $t\to-\infty$ 时趋向于不变环面上的某一解．显然 $M_+$ 由下式决定

$$u_\varkappa^2+v_\varkappa^2=C_\varkappa^2, \qquad (1\leqslant\varkappa\leqslant k)$$

$$p_\lambda=0. \qquad (1\leqslant\lambda\leqslant l)$$

另一个 $k+l$ 维流形 $M_-$ 由下式决定

$$u_\varkappa^2+v_\varkappa^2=C_\varkappa^2, \qquad (1\leqslant\varkappa\leqslant k)$$

$$q_\lambda=0. \qquad (1\leqslant\lambda\leqslant l)$$

$M_+$ 与 $M_-$ 都是拉格朗日流形.

以上的分析仅仅是对线性化系统的．人们自然要问，非线性系统(8.1)是否也具有相似的特性呢？特别是，有没有形如

$$z=\phi(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_k),\quad \xi_\varkappa=\xi_\varkappa(0)e^{i\omega_\varkappa t} \qquad 1\leqslant\varkappa\leqslant k \quad (8.6)$$

的解，其中 $\phi$ 是实解析的．如果在(8.4)式中让 $K=0$，如上所述的 $k$ 维不变环面仍然存在．为了看清这一点，我们只需注意到形如(8.5)式的不变环面上 $y_\varkappa$ 始终是常数，不随时间而变化．由于我们只是在原点附近考虑问题，便可将 $K(u,\ v,\ p,\ q)$看成是小扰动．我们将证明未受扰系统的不变环面

$$x_\varkappa=\omega_\varkappa t+x_\varkappa^0, \qquad y_\varkappa=y_\varkappa^0, \qquad 1\leqslant r\leqslant k$$

$$p_\lambda=q_\lambda=0, \qquad 1\leqslant\lambda\leqslant l$$

$$\omega_\varkappa(y^0)=\sigma_\varkappa+\sum_{\varkappa'=1}^{k}T_{\varkappa\varkappa'}y_{\varkappa'}^0 \qquad (8.7)$$

仍然存在，只要 $\omega$ 满足 Diophantine 条件

$$|\langle j,\ \omega\rangle|\geqslant D|j|_1^{-\mu}, \qquad \forall j\in\mathbb{Z}^k\backslash\{0\} \quad (8.8)$$

$D>0$.

**定理 1**(S. Graff, 1974)　考虑定义在复区域

$\mathscr{D}$: $\{|\mathrm{Im}\,x|\leqslant r\}\times\{|y-y^0|\leqslant 4s\}\times\{|p|\leqslant 6s\}\times\{|q|\leqslant 6s\}$,

$$x=(x_1, \cdots, x_k), \qquad y=(y_1, \cdots, y_k),$$
$$p=(p_1, \cdots, p_l), \qquad q=(q_1, \cdots, q_l)$$
的哈密顿系统
$$\mathscr{H}(x, y, p, q)=h(y)+\langle p, \Omega q\rangle+P(x, y, p, q).$$
设 $h_y(y^0)=\omega$ 满足(8.8)，$h_{yy}^{-1}$ 存在，且有 $\theta>0$ 使
$$\sup|h_{yy}^{-1}|\leqslant\frac{1}{\theta};$$
$\Omega$ 是 $l\times l$ 方阵，满足条件(8.3). 存在 $d=d(r, s, k, l, D, \mu, \lambda)\overset{0}{>}0$，只要在 $\mathscr{D}$ 内 $|P|\leqslant d$，那么此系统也具有一个 $k$ 维不变环面. 详细一点说，存在一个实解析嵌入 $\mathscr{U}$: $\mathbb{T}^k\to\mathbb{T}^k\times\mathbb{R}^{k+2l}$，使得此环面可以表示成
$$(x, y, p, q)=\mathscr{U}(\xi), \qquad \xi\in\mathbb{T}^k$$
此环面上的流满足方程
$$\dot{\xi}=\omega.$$
对于任意 $\varepsilon>0$，只要 $d>0$ 足够小，都可以使得
$$\|\mathscr{U}(\xi)-\mathbb{T}^k\times\{\dot{y}\}\times\{p=q=0\}\|<\varepsilon.$$

在给出本定理的证明之前，我们首先证明一个引理. 根据此引理，关于哈密顿函数主部具有形式 $h(y)+\langle p, \Omega q\rangle$ 的假设就是合理的，并不是一种特殊要求.

**引理 1** 设哈密顿函数为
$$\mathscr{H}(x, y, p, q)=h(y)+\frac{1}{2}\langle p, Q_{11}p\rangle+\langle p, Q_{12}q\rangle+\frac{1}{2}\langle q, Q_{22}q\rangle,$$
其中$(x, y)$、$(p, q)$是共轭变量；$JQ$ 的特征值不在虚轴上，$Q$ 的具体表达式是：
$$Q=\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{12}^T & Q_{22}\end{pmatrix}.$$
那么，存在辛坐标变换 $\mathscr{L}$: $(x, y, p, q)\to(x, y, z_+, z_-)$，使
$$\mathscr{H}(x, y, z_+, z_-)=h(y)+\langle z_-, \Omega z_+\rangle,$$

其中 $z_{\pm}=(z_{\pm1}, z_{\pm2}, \cdots, z_{\pm l})$，$\Omega$ 是 $l\times l$ 方阵且满足条件(8.3).

**证明** 我们只需要找到一个辛矩阵 $T$，使得

$$T^{-1}(JQ)T=\mathrm{diag}(\tilde{\Omega},\ -\tilde{\Omega}^T),$$

$\tilde{\Omega}$ 的特征值具有正实部即可. 显然，我们可以找到矩阵 $T$，也许不是辛矩阵，使

$$T^{-1}(JQ)T=\mathrm{diag}(M,\ N),$$

其中 $M$ 的特征值具有正实部而 $N$ 的特征值具有负实部. 注意到 $JQ$ 的特征值总是以成对的形式出现，$M$ 和 $N$ 都是 $l\times l$ 阶方阵. 显然这样的 $T$ 不是唯一的. 对于任意非奇异阵 $W=\mathrm{diag}(W_{11}, W_{22})$，$TW$ 也具有 $T$ 的如上性质. 现在问题已经归结于寻找合适的 $W$，使得 $TW$ 是辛矩阵.

置 $A=JQ$. 因为 $Q$ 是对称的，所以

$$A^T=QJ^T=-QJ=JAJ.$$

这样，我们可得到 $A^T$ 的两种表达形式:

$$A^T=JAJ=-JAJ^T=-JT\,\mathrm{diag}(M,\ N)(JT)^{-1},$$

$$A^T=(T^{-1})^T\,\mathrm{diag}(M^T,\ N^T)T^T.$$

由此可以推得:

$$(T^TJT)\mathrm{diag}(M,\ N)+\mathrm{diag}(M^T,\ N^T)(T^TJT)=0. \tag{8.9}$$

若记 $T^TJT=z=\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$，有

$$z_{11}M+M^Tz_{11}=0,\quad z_{22}N+N^Tz_{22}=0,$$

$$z_{21}M+N^Tz_{21}=0,\quad z_{12}N+M^Tz_{12}=0.$$

由于 $M$ 的特征值总是具有正实部，$N$ 的特征值总是具有负实部，因此 $z_{11}=z_{22}=0$. 由于 $z^T=-z$，

$$Z=\begin{pmatrix} 0 & z_{12} \\ -z_{12}^T & 0 \end{pmatrix}.$$

如果用 $TW$ 代替 $T$，我们得到:

$$(TW)^T J(TW) = \begin{pmatrix} 0 & W_{11}^T z_{12} W_{22} \\ -(W_{11}^T z_{12} W_{22})^T & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 $\det^2 z_{12} = (-1)^l \det J \det^2 T \neq 0,$

$z_{12}$ 可逆, 故选择 $W_{11} = I$, $W_{22} = z_{12}^{-1}$, 我们便得到

$$(TW)^T J(TW) = J.$$

根据定义, $TW$ 是辛矩阵.

设 $T$ 是辛矩阵, (8.9)式因此而成为

$$J\operatorname{diag}(M, N) + \operatorname{diag}(M^T, N^T) J = 0,$$

所以 $M = -N^T$, 引理 1 得证.

现在介绍定理 1 的证明梗概. 基本想法和证明 KAM 理论一样, 构造一个从复区域

$$\mathscr{D}_\infty: \left\{|\operatorname{Im} x| \leqslant \frac{r}{2}\right\} \times \{y = c\} \times \{p = q = 0\}$$

到 $\mathscr{D}$ 的实解析嵌入 $\mathscr{U}$. 这个 $\mathscr{U}$ 通过变换的无穷序列复合而得到:

$$\mathscr{U} = \lim_{v \to \infty} \mathscr{U}_v = \lim_{v \to \infty} T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_v,$$

$$\mathscr{U}_v: \mathscr{D}_v \to \mathscr{D}.$$

随着 $v \to +\infty$, $\mathscr{U}_v$ 的定义域 $\mathscr{D}_v$ 收缩到一个 $k$ 维子流形 $\mathscr{D}_\infty$. 这个构造是以这样的方式, 使得由 $\mathscr{H} \circ \mathscr{U}_v$ 决定的在 $\mathscr{D}_v$ 的向量场 $V(w_v)$, $w_v = (x_v, y_v, p_v, q_v) \in \mathscr{D}_v$ 一致收敛于 $\mathscr{D}_\infty$ 上的向量场

$$V_\infty = (\omega, 0, 0, 0).$$

注意到方程 $\dot{w}_\infty = W_\infty(w_\infty)$, $w_\infty = (\omega, 0, 0, 0)$ 有一族不变环面 $\operatorname{Im} x_\infty = \text{const}$. 上面的哈密顿流是 $x_\infty(t) = \omega t + x_\infty(0)$, 如果我们得到上述的嵌入 $\mathscr{U}_\infty$, 那么 $u_\infty(x_\infty(t), c, 0, 0)$ 将满足由哈密顿函数 $\mathscr{H}(x, y, p, q)$ 决定的方程. 实环面 $\operatorname{Im} x_\infty = 0$ 在 $\mathscr{U}_\infty$ 下的象便是我们要证实存在的环面.

下面来看任意一步迭代是如何构造的. 由于我们并不打算给出严格证明, 而只是给出证明的思想, 此处只给出不同于经典 KAM 理论的证明之处, 相似部分将略去.

简记$(p, q)=(z_+, z_-)=z$, 将 $\mathscr{H}$ 写成另一种形式

$$\mathscr{H}(x, y, z)=h(y)+[P]_x(y, 0)+\langle z_-, \Omega(x, y)z_+\rangle + \{P(x, y, z)-[P]_x(y, 0)\},$$

其中
$$[P]_x(y, 0)=(2\pi)^{-k}\int_0^{2\pi} P(x, y, 0)dx.$$

记
$$h^*(y)=h(y)+[P]_x(y, 0),$$
$$P^*(x, y, z)=P(x, y, z)-[P]_x(y, 0),$$

$\mathscr{H}$ 可以写成下列形成

$$\mathscr{H}(x, y, z)=h^*(y)+\langle z_-, \Omega(x, y)z_+\rangle+P^*(x, y, z).$$

置
$$h_y(y)-\omega+\frac{\partial}{\partial y}[P]_x(y, 0)=0,$$

在 $y^0$ 附近上述方程显然有解 $y^*$, 即 $h_y^*(y^*)\omega$. 只要 $|P|\leqslant d$ 足够小, 可使 $|y^0-y^*|\leqslant s$. 为构造辛变换 $T$: $\mathscr{D}_+=\{|\mathrm{Im}\,\xi|\leqslant r_+,\ |\eta-\eta^0|\leqslant 4s_+,\ |\zeta_\pm|\leqslant 6s_+\}\to\hat{\mathscr{D}}_*=\{|\mathrm{Im}\,x|\leqslant r-5\delta,\ |y-y^*|\leqslant s,\ |z_\pm|\leqslant s\}\subset\mathscr{D}(\hat{\eta}=y^*)$, 我们通过采用如下形式的母函数

$$\mathscr{S}(x, \eta, z_+, \zeta_-)=\langle x, \eta\rangle+\langle z_+, \zeta_-\rangle+S(x, \eta, z_+, \zeta_-) \tag{8.10}$$

来定义辛变换(7.9). 证明的关键自然是 $S$ 的选取. 与证明经典的KAM理论情况不同, 此时 $S$ 的决定不再通过像求解(7.10)式那样的同调方程来决定. 此处的方程在形式上要复杂得多.

$$\partial S+\langle S_{z_+}, \Omega(x, \eta)z_+\rangle-\langle\zeta_-, \tilde{\Omega}(x, \eta)S_\zeta\rangle -\langle\zeta_-, \{\tilde{\Omega}(x, \eta)-\Omega(x, \eta)\}z_+\rangle +\sum_{l=0}^{2}P^{*(l)}(x, \eta, z_+, \zeta_-)=0. \tag{8.11}$$

其中 $\partial S=\langle\omega, S_x\rangle$, $\tilde{\Omega}(x,\eta)=\Omega(x,\eta)+P^*_{z_+z_-}(x, \eta, 0, 0)$. (8.11)式的导出和(7.10)的导出过程类似, 只是由于此处的环面是低维的, 从此环面可以延伸出稳定与不稳定流形才使得决定母函数 $S$ 的方程较复杂. 假设母函数为(8.10)式所示形式的辛变换(7.9)将 $\mathscr{H}$ 变换成如下形式:

$$\mathscr{G}(\xi, \eta, \zeta)=\mathscr{H}\circ T(\xi, \eta, \zeta)$$
$$=g(\eta)+\langle\zeta_+, \widetilde{\Omega}(\xi, \eta)\zeta_-\rangle+G(\xi, \eta, \zeta),$$

要求 $G$ 是 $P$ 的高阶小量. 将变换关系(1.9)代入 $\mathscr{H}$ 的表达式, 令无望成为高阶小量的各项之和为零即可导出方程(8.11). 方程(8.11)的求解比(7.10)的求解困难得多. S. Graff 通过寻找形式为下列形式的母函数使问题获得解决:

$$S(x, \eta, z_+, \zeta_-)=A(x, \eta)+B(x, \eta)z_++C(x, \eta)\zeta_-$$
$$+\frac{1}{2}\langle z_+, D(x, \eta)z_+\rangle$$
$$+\frac{1}{2}\langle\zeta_-, F(x, \eta)\zeta_-\rangle. \tag{8.12}$$

其中 $B$ 和 $C$ 是 $l$ 向量, $D$ 和 $F$ 是 $l\times l$ 矩阵. 可以看出, 中间缺少一项 $\langle z_+, E(x, \eta)\zeta_-\rangle$. 如果有这样一项, 方程(8.11)的求解就会极困难, 不能得到我们所需的形式. 将(8.12)代入(8.11)式中, 令 $\zeta_- z_+$ 的各阶系数为 0, 得到如下一组方程:

$$\partial A(x, \eta)+P^*(x, \eta, 0, 0)=0, \tag{8.13}$$
$$\partial B(x, \eta)+B(x, \eta)\Omega(x, \eta)+P^*_{z_+}(x, \eta, 0, 0)=0, \tag{8.14}$$
$$\partial C(x, \eta)-C(x, \eta)\widetilde{\Omega}(x, \eta)+P^*_{z_-}(x, \eta, 0, 0)=0, \tag{8.15}$$
$$\partial D(x, \eta)+D(x, \eta)\Omega(x, \eta)+\Omega^T(x, \eta)D(x, \eta)$$
$$+P^*_{z_+^2}(x, \eta, 0, 0)=0, \tag{8.16}$$
$$\partial F(x, \eta)-F(x, \eta)\widetilde{\Omega}^T(x, \eta)-\widetilde{\Omega}(x, \eta)F(x, \eta)$$
$$+P^*_{z_-^2}(x, \eta, 0, 0)=0 \tag{8.17}$$
$$\Omega(x, \eta)+P^*_{z_+z_-}(x, \eta, 0, 0)=\widetilde{\Omega}(x, \eta) \tag{8.18}$$

(8.13)式的求解不难, 像求解(7.10)一样. (8.14)～(8.17)的求解要困难一些. 下面的引理是关键:

**引理 2** 考虑方程

$$u_x(x, z)\omega+u_z(x, z)\phi(x, z)z+A(x, z)u(x, z)$$
$$=f(x, z), \tag{8.19}$$
$$\omega=(\omega_1, \cdots, \omega_n), \ x=(x_1, \cdots, x_n), \ z=(z_1, \cdots, z_m).$$

$\phi(x, z)$和$A(x, z)$在条状域 $\Sigma_{r,R}=\{|\operatorname{Im} x|\leqslant r, |z|\leqslant R\}$ 上实解析. 设$\phi(x, z)$满足正性条件

$$\operatorname{Re}\langle\gamma, \phi(x, z)\gamma\rangle\geqslant\mu|\gamma|^2, \qquad \forall\gamma\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$$

$\mu>0$, $A$满足条件

$$\operatorname{Re}\langle\gamma, A(x, z)\gamma\rangle\geqslant-\varepsilon|\gamma|^2, \qquad \forall\gamma\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$$

$0<\varepsilon<\mu$. 对任意在$\Sigma_{r,R}$中实解析的$f(x, z)$, 只要$f(x, 0)=0$, 那么(8.19)存在唯一解$u$, $u$在$\Sigma_{r,R}$上也实解析, $u(x, 0)=0$. 如果定义模为

$$\|u(x, z)\|=\sup_{\Sigma_{r,R}}(|u(x, z)|/|z|),$$

我们有下列估计:

$$\|u\|\leqslant C(\mu)\|f\|. \tag{8.20}$$

**证明** 记(8.19)的特征方程

$$\dot{\xi}=\omega, \quad \dot{\zeta}=\phi(\xi, \zeta)\zeta$$

的解为$(\xi(t), \zeta(t))$. 如果$t=0$时的初始值在$\Sigma_{r,R}$之内, 那么当$-\infty<t\leqslant0$时特征线仍然在$\Sigma_{r,R}$之内, 而且

$$\frac{d}{dt}|\zeta|^2=2\operatorname{Re}\langle\zeta, \phi(\xi, \zeta)\zeta\rangle\geqslant2\mu|\zeta|^2, \quad |\zeta(0)|\neq0.$$

这表明 $$|\zeta(\tau)|\leqslant e^{-\mu(t-\tau)}|\zeta(t)|. \qquad \forall\tau<t$$

因此, 当$\tau\to\infty$时, $|\zeta(\tau)|\to0$.

我们首先沿着特征线$\xi(t)$、$\zeta(t)$求解方程(8.19). 这时, 此方程可以写成如下形式

$$\dot{u}+A(\xi(t), \zeta(t))u=f(\xi(t), \zeta(t)). \tag{8.21}$$

其通解为

$$u(t, \tau)\gamma+\int_\tau^t u(t, \tau')f(\xi(\tau'), \zeta(\tau'))d\tau'.$$

$u(t, \tau)$是(8.21)式的齐次方程的基本解, $u(\tau, \tau)=I$. (8.21)的满足条件$u(t, \tau)|_{t\to-\infty}=0$的特解是

$$u(\xi(t), \zeta(t))=\int_{-\infty}^t u(t, \tau')f(\xi(\tau'), \zeta(\tau'))d\tau'. \tag{8.22}$$

这一结论可以从关系式

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}-uA=0 \tag{8.23}$$

以及关于 $A$ 的假设推出. 事实上, 从(8.23)可得

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}u^*-uAu^*=0.$$

这意味着 $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \tau}\operatorname{tr}(uu^*)=\operatorname{tr}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}u^*\right)=\operatorname{tr}(uAu^*)$.

注意到 $\frac{\partial}{\partial \tau}(\operatorname{tr} uu^*)$是实的, 因此

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \tau}\operatorname{tr}(uu^*)=\operatorname{Re}\operatorname{tr}(uAu^*)\geqslant-\varepsilon\operatorname{tr}(uu^*).$$

从 $\tau$ 到 $t$ 积分, 得到

$$\operatorname{tr}(uu^*)(t,\tau)\leqslant C^2e^{2\varepsilon(t-\tau)}.\quad (C^2=\operatorname{tr}(uu^*)(\tau,\tau))$$

由此可得

$$\begin{aligned}|u(\xi(t),\zeta(t))|&\leqslant\int_{-\infty}^{t}|u(t,\tau')||f(\xi(\tau'),\zeta(\tau')|d\tau'\\&\leqslant\int_{-\infty}^{t}\{\operatorname{tr}(uu^*)(t,\tau')\}^{1/2}\|f\|d\tau'\\&\leqslant C\|f\||\zeta(t)|\int_{-\infty}^{t}e^{\varepsilon(t-\tau')-\mu(t-\tau')}dt'\\&=\frac{C}{\mu-\varepsilon}\|f\||\zeta(t)|\to0.\qquad(\text{当 } t\to-\infty\text{ 时})\end{aligned}$$

上面的推导过程中利用了性质 $\varepsilon<\mu$. 到这一步, 每条特征线上的解已经找到. 余下的便是对任意 $(x,z)\in\Sigma_{r,R}$ 求解 $u(x,z)$. 设 $(\xi(t),\zeta(t))$是通过 $\xi(0)=x,\zeta(0)=z$ 的特征线, 所求的解 $u(x,z)$ 便可以通过让(8.22)式中 $t=0$ 来得到:

$$u(x,z)=\int_{-\infty}^{0}u(0,\tau')f(\xi(\tau'),\zeta(\tau'))d\tau'. \tag{8.24}$$

所以, 当 $\varepsilon=\frac{\mu}{2}$ 时,

$$\|u(x,z)\|=\sup_{\Sigma_{r,R}}\frac{|u(x,z)|}{|z|}=\frac{2C}{\mu}\|f\|.$$

(8.24)式中的积分在 $\sum_{r,R}$ 中一致收敛, 表明 $u(x,z)$实解析. 如果

$z=\zeta(0)=0$, 则 $\zeta(\tau')=0$, 这说明 $u(x, 0)=0$.

**推论** 考虑方程

$$u_x(x)\omega+u(x)\Phi(x)+A(x)u(x)=F(x),$$

其中 $\Phi(x)$ 和 $A(x)$ 在 $\Sigma_r=\{|\operatorname{Im} x|\leqslant r\}$ 中实解析. 若

$$\operatorname{Re}\langle\gamma, \Phi(x)\gamma\rangle\geqslant\mu|\gamma|^2,$$

$$\operatorname{Re}\langle\gamma, A(x)\gamma\rangle\geqslant\mu|\gamma|^2, \qquad \forall\gamma\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$$

那么对每一个实解析矩阵 $F(x)$, 存在唯一实解析解 $u(x)$, 满足估计

$$|u(x)|\leqslant\frac{C}{\mu}|F(x)|, \quad C>0. \tag{8.25}$$

**引理 3** 考虑方程

$$u_x(x, z)\omega+A(x, z)u(x, z)=f(x, z). \tag{8.26}$$

其中 $A$ 在区域 $\Sigma_{r,R}=\{|\operatorname{Im} x|\leqslant r, |z|\leqslant R\}$ 上实解析. 设对所有复向量 $\gamma\neq0$, 总有 $\operatorname{Re}\langle\gamma, A(x, z)\gamma\rangle>0$, 那么对每一 $f$ 实解析, 存在唯一实解析解 $u(x, z)$, 使得

$$\sup_{\Sigma_{r,R}}|u(x, z)|\leqslant c\sup_{\Sigma_{r,R}}|f(x, z)|. \tag{8.27}$$

证明和引理(2.3)的证明类似.

根据以上的引理, 可以看出, 方程(8.13)—(8.17)有解, 并能得到这些解的上界估计. 事实上, 当区域由 $\mathscr{D}$ 收缩至 $\{|\operatorname{Im} x|<r-\delta, |y-y^*|\leqslant2s, |z|\leqslant4s\}$ 之后, 由柯西关于解析函数导数的估计方法, 可得:

$$\max\{|P^*_{z_+}(x, \eta, 0, 0)|, |P^*_{z_-}(x, \eta, 0, 0)|\}\leqslant\frac{d}{s},$$

$$\max\{|P^*_{z_+^2}(x, \eta, 0, 0)|, |P^*_{z_+z_-}(x, \eta, 0, 0)|, |P^*_{z_-^2}(x,\eta,0,0)|\}$$
$$\leqslant\frac{2d}{s^2}.$$

根据(8.20)、(8.25)和(8.27)式, 不难得到(8.13)～(8.17)的解的上界估计:

$$|A(x, \eta)|\leqslant C_1d/\delta^{(2k+1)},$$

$$\max\{|B(x, \eta)|, |C(x, \eta)|, |D(x, \eta)|\}\leqslant C_2(\mu)d/s,$$

$$|F(x, \eta)| \leqslant C_2(\mu)d/s^2.$$

注意到母函数(8.12)的具体形式，将区域进一步收缩到 $\hat{D}_*$，并利用柯西估计方法，可以得到 $S$ 及其导数在此区域内的上界：

$$\max\{|S|, |S_x|\} \leqslant C_3 d,$$

$$\max\{|S_\eta|, |S_{z_+}|, |S_{2-}|\} \leqslant C_3 d/s,$$

$$\max\{|S_{z_+^2}|, |S_{z_+\zeta_-}|, |S_{\zeta_-^2}|\} \leqslant C_3 d/s^2,$$

其中 $C_3 = 5\delta^{-(2k+2)} \max\{C_1, C_2\}$. 与(7.13)相比较，可以发现，我们已经得到所希望得到的母函数，用此母函数定义的辛变换将符合要求. 余下的步骤和证明经典的KAM 理类似，在此不再叙述.

在 S. Graff 的证明中，$\Omega$ 的特征值不在虚轴上这一条件(见(8.3)式)起着非常重要的作用，这从引理 1 和引理 2 的证明过程可以看出. 但这仅仅从证明方法上看待这一条件. 事实上，这一条件也表示在此低维不变环面附近的动力行为有它自己的特征. S. Graff 证明了存在两个$(k+l)$维实解析拉格朗日流形 $M_+$ 和 $M_-$ 从低维不变环面延伸出来，从此两流形上出发的轨道当 $t \to -\infty$ 或 $+\infty$ 时趋向于此不变环面. 注意到不变环面为 $k$ 维，$M_+$ 和 $M_-$ 是此环面的稳定与不稳定流形. 既然有此几何图象，人们一般称此低维不变环面为双曲型不变环面.

既然有双曲型不变环面，人们自然要问有没有椭圆型低维不变环面呢？这是椭圆型不动点的自然延伸. 要考虑这个问题，如同考虑双曲型问题一样，我们要首先弄清相应的哈密顿函数主部是何种形式.

既然考虑椭圆型低维环面，我们自然假设(8.2)式中 $JA$ 的特征值都具有零实部. 这时，如果考虑$(k+l)$维环面，问题就转化为经典KAM 理论，当然这必须有 Diophantine 条件成立

$$|\langle v, \sigma\rangle| \geqslant D|v|_1^{-\mu}. \qquad \forall v \in \mathbb{Z}^{k+l} \backslash \{0\}$$

现在我们考虑另一种情况，即若$(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{k+l})$满足 $l$ 个共振关系，即存在 $l$ 个整数向量 $v_j(j=1, 2, \cdots, l)$，使得 $\langle v, \sigma\rangle = 0$. 这时，通过一个 $\mathbb{T}^{k+l}$ 上的变换，使 $JA$ 有 $2l$ 个特征值为 0. 所以

我们可以设哈密顿函数具有如下形式：

$$h(y, z)=h_0(y)+\langle\Omega(y), y'\rangle+O^3(z), \tag{8.28}$$

其中 $y'_i=\frac{1}{2}(z_i^2+z_{i+l}^2)$，$h$ 实解析．如果略去 $O^3(z)$，由 $h$ 确定的哈密顿向量场是可积的，这时相应的运动方程是

$$\dot{x}_i=\omega, \qquad \dot{y}_i=0, \qquad 0\leqslant i\leqslant k$$

$$\dot{z}_i=\Omega_i z_{i+l}, \qquad \dot{z}_{i+l}=-\Omega_i z_i, \qquad 0\leqslant i\leqslant l$$

$\omega=h_0 y$．这个系统具有低维 $T^k$ 不变环面

$$T_0=\mathbb{T}^k\times\{O\}\times\{0\}\times\{0\},$$

环面上的流是拟周期流 $x=\omega t+x_0$，它的法向空间是由 $Z$ 坐标刻画的，法向频率是 $\Omega$．与之相对应，$\omega$ 称为**切向频率**．我们称映射 $y\mapsto(\omega(y),\ \Omega(y))$ 为**频率映射**．如果要证明当 $O^3(z)$ 不为零时 $k$ 维环面的存在性，从证明方法而言，由于缺乏条件(8.3)，上面发展的一套求解方程(8.13)～(8.17)的方法不再有用．从系统在此环面附近的动力行为来看，此环面附近不再有稳定与不稳定流形 $M_+$ 和 $M_-$．

在给出处理此问题的方法之前，我们首先试着用牛顿迭代法来解决此问题，这样可以明白具体困难之所在，进而给出问题的提法及解决的方法．这方面的工作是由 L. Eliasson 做出的[16]．其实，这个问题早就为 Moser 所重视，但从 S. Graff 关于双曲型低维环面的工作到 L. Eliasson 关于椭圆型低维环面的工作之间，相隔了 14 年！

仍采用以上用的记法，$N$ 表示主部 $h_0(y)+\langle\Omega(y), y'\rangle$，$P$ 表示摄动部分，$P=P(x, y, z)$．让

$$H=N+P=N+R+(P-R),$$

将 $P$ 展开成 $z$ 的泰勒级数，$x$ 的傅里叶级数，$R$ 是这样的级数的有限阶截断．为了进行牛顿迭代，必须寻找辛变换．这个变换可以像 §7 一样，用母函数生成，也可以写成一个哈密顿向量场 $X_F$ 确定的流 $X_F^t$ 的时间 1 映射：

$$T = X_F^t|_{t=1}.$$

$T'$ 显然是辛映射．注意到

$$\frac{d}{dt} G\circ X_F^t = \{G, F\}\circ X_F^t.$$

$F$ 是生成向量场 $X_F$ 的哈密顿函数，上式右端表示 $G$ 和 $F$ 的泊松括号在 $X_F^t$ 处的取值，我们得到

$$\begin{aligned}(N+R)\circ T' &= N\circ X_F^t|_{t=1} + R\circ X_F^t|_{t=1} \\ &= N + \{N, F\} + \int_0^1 (1-t)\{\{N, F\}, F\}\circ X_F^t dt \\ &\quad + R + \int_0^1 \{R, F\}\circ X_F^t\, dt \\ &= N + R + \{N, F\} \\ &\quad + \int_0^1 \{(1-t)\{N, F\} + R, F\}\circ X_F^t\, dt.\end{aligned}$$

积分号内一项是 $R$ 和 $F$ 的二次项，因而是新的不可积项的一部分．现在的要点是寻找 $F$，满足下列方程

$$N + R + \{N, F\} = N_+.$$

置 $N_+ = N + \hat{N}$．这相当于要求解方程

$$\{F, N\} + \hat{N} = R, \tag{8.29}$$

其中 $N$ 和 $R\hat{N}$ 已知，$F$ 和 待定．如果这样的解存在，那么

$$(1-t)\{N, F\} + R = (1-t)\hat{N} + tR,$$

$$H\circ T = N_+ + P_+ = N_+ + Q + (P-R)\circ T.$$

其中

$$Q = \int_0^1 \{(1-t)\hat{N} + tR, F\}\circ X_F^t\, dt.$$

显然 $Q$ 是 $R$、$F$ 以及 $\hat{N}$ 的二次项．

方程(8.29)的解是由线性算子 $L$: $F\to\{F, N\}$ 决定的．如果 $F = e^{i\langle k, \alpha\rangle} y^l z^p \bar{z}^q$，那么

$$LF = i(\langle k, \omega\rangle + \langle p-q, \Omega\rangle)F.$$

因此，每一个这样的函数 $F$，均是 $L$ 的特征函数．这时，它的定义域可以分解成两个不变子空间：核空间 $\mathcal{N}$ 以及值域 $\mathcal{R}$．在 $\mathcal{R}$

上，$L$ 是可逆的．如果将 $R$ 按照两个空间进行分解 $R=R_{\mathcal{N}}+R_{\mathcal{R}}$，我们可以选择 $\hat{N}=R_{\mathcal{N}}$，$R$ 到 $\mathcal{N}$ 上的投影．事实上，如果 $R=\sum\limits_{k,l,p,q} R_{klpq}e^{i\langle k,x\rangle}y^l z^p \bar{z}^q$，那么

$$\hat{N}=\sum_{\langle k,\omega\rangle+\langle p-q,\Omega\rangle=0} R_{klpq}e^{i\langle k,x\rangle}y^l z^p \bar{z}^q,$$

$$F=\sum_{\langle k,\omega\rangle+\langle p-q,\Omega\rangle\neq 0} \frac{-iR_{klpq}}{\langle k,\omega\rangle+\langle p-q,\Omega\rangle} e^{i\langle k,x\rangle}y^l z^p \bar{z}^q.$$

选取 $P$ 的截断 $R$，使 $F$ 的和只是在

$$2|l|+|p+q|\leqslant 3$$

范围内，$P-R$ 是 $P$ 的高阶小量．为了使 $F$ 的上述表达式真正收敛，并且能用 $R$ 的模来界定 $F$ 的模，小分母 $\langle k,\omega\rangle+\langle p-q,\Omega\rangle$ 是必须考虑的．如果在这一步迭代中此类问题能够解决，我们也将在下一步迭代中面临小分母是否破坏收敛性的问题．实际上，由于 $N_+=N+\hat{N}$，由非共振可知 $\langle k,\omega\rangle+\langle p-q,\Omega\rangle=0$ 等价于 $k=0$ 和 $p=q$，因而发生频率漂移：

$$h_{0y}(y)\to(h_0+\hat{h})_y(y),$$

$$\Omega(y)\to(\Omega+\hat{\Omega})(y).$$

因为频率映射 $y\mapsto(\omega(y),\Omega(y))$：$\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^{k+l}$ 不可能是局部微分同胚，所以不可能像证明经典 KAM 理论或是双曲型低维环面存在性一样，通过移动基点 $y_0\to y^*$ 来达到固定频率之目的．如果频率在每次迭代中发生变化，小分母的收敛性就可能被破坏．针对这种情况，L. Eliasson 提出了非退化性的概念．如果对于所有的 $y$，下面两式成立：

$$\det(D\omega(y))\neq 0, \tag{8.30}$$

$$\langle k,\Omega(y)\rangle\neq\langle k,\omega(y)(D^{-1}\omega(y))^{-1}D\Omega(y)\rangle,$$

$$\forall k\in\mathbb{Z}^l\setminus\{0\},\ |k|\leqslant 3 \tag{8.31}$$

哈密顿量 $h(y,z)$ 就称为**非退化的**．根据(8.30)映射 $y\to\omega(y)$ 是局部微分同胚，因此可以认为 $\Omega(y)$ 是 $\omega$ 的函数．(8.31)式的右端因而是 $\langle k,\Omega(y)\rangle$ 在方向 $\omega$ 上的导数．

为了寻找合适的辛坐标变换，我们必须解决小分母问题．如果按照上面的步骤去求取这种变换，$(\omega, \Omega)$要满足 Diophantine 条件

$$|\langle u, \omega\rangle+\langle v, \Omega\rangle| \geqslant D(|u|+|v|)^{-\mu},$$
$$\forall(u, v)\in \mathbb{Z}^{k+l}\setminus\{0\},\ |v|\leqslant 3 \quad (8.32)$$

记满足(8.32)的频率向量$(\omega, \Omega)\in DC(D)$，让 Diophantine 常数 $D$ 取遍所有正数，记 $DC=\bigcup DC(D)$．再考虑齐次 Diophantine 条件．如果 $\omega\in \mathbb{R}^k$ 满足 Diophantine 不等式(7.2)，称 $\omega\in DC_0(D)$．记 $DC_0=\bigcup DC_0(D)$．

设 $B$ 是一个开集，在频率映射的定义域内．记 $J$ 是 $B$ 在频率映射下的象．由条件(8.30)可知，$J$ 是 $\omega(B)$上的一个图象．显然，由(8.30)，$\omega(B)\cap DC_0\neq\varnothing$，而(8.31)则不仅表示 $J\cap DC\neq\varnothing$．事实上，如果 $\omega\in DC_0$，整个直线 $\lambda\omega(\lambda\in\mathbb{R}^1)$也属于 $DC_0$．(8.31)表示 $J\cap DC$ 到 $\omega$ 上的投影包含了 $\lambda\omega$ 的一个稠集．这意味着如果 $\omega(y_0)\in DC_0$，那么$(\omega(y), \Omega(y))\in DC$ 即使对 $y_0$ 不成立，至少也对某一在 $y_0$ 附近的 $y$ 成立，而且 $\omega(y)$是在 $\omega(y_0)$的方向上．在观察到这一性质以后，L. Eliasson 得到如下结果：

**定理 2**(L. Eliasson, 1988)　设 $h(y, z)=h_0(y)+\langle\Omega(y), y\rangle+O^3(z)$是一个非退化哈密顿函数，定义在$\{(x, y, z): y=z=0\}$的一个邻域 $D_R\subset T^*(\mathbb{T}^k\times\mathbb{R}^l)$上．设 $B$ 是一个关于 $y$ 的球，使得 $\left\{(x, y, z): \frac{1}{2}y\in B,\ z=0\right\}\subset D_R$，$D$ 是 $D_R$ 的一个复邻域．那么，

(i) 存在常数 $C$，只依赖于 $h$ 及 $D_R$，使得对

$$k\geqslant cb^{-1}J(h, B)\cap DC(k)\neq 0,$$

这里 $b$ 是 $B$ 的直径；

(ii) 存在常数 $C$，只依赖于 $h$ 及 $D_R$，使得下列结论成立：对任意 $k>0$，对任意 $D$ 上实解析函数 $f$，只要 $\sup\limits_{D}|f-h|\leqslant C/k^2$，以及对于任意$(\omega(y_0), \Omega(y_0))\in DC(k)\cap J(h, B)$，存在一个 $k$-环面 $\Lambda$ 在哈密顿向量场 $X_f$ 定义的流之下不变．$X_f$ 在 $\Lambda$ 上可线性

化，其频率为$(\tilde{\omega}, \tilde{\Omega})$，$\tilde{\omega}=t\omega(y_0)$，其中$|1-t|\leqslant CK\sup_D|f-h|$. 不仅如此，$\Lambda$还是一个图象$\{(x, p(x)): x\in\mathbb{T}^k\}$,

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^n}|p(x)-(y_0, 0)|\leqslant CK^3\sup_D|f-h|.$$

这个定理说明了在$\{y=y_0, z=0\}$附近关于向量场$X_f$的$k$维不变环面的存在性. 与双曲型低维不变环面存在性定理有所不同，此处不能要求$\omega(y_0)$固定不动. 另一个与之不同之处是系统在此环面附近的动力行为. 双曲型不变环面具有稳定与不稳定流形，而椭圆型环面则没有.

根据前面的论述，证明的主要困难点是克服频率漂移问题. 由于考虑$k$维环面，我们实际上有$k$个参数. 可以适当选取$k-1$个参数，以便使得新的哈密顿函数$h^+(y, y')=\langle\tilde{\omega}, y\rangle+\langle\tilde{\Omega}, y'\rangle+$高阶小量，而且$\tilde{\omega}$平行于$\omega_0$. 由于$CD$在$\mathbb{R}^{k+l}$中稠密，可以使得$(\tilde{\omega}, \tilde{\Omega})\in DC(K^+)$，$K^+$是某一个Diophantine常数. 为了继续迭代过程，我们必须控制$K^+$，它不能过分小. 这可以通过调节$\tilde{\omega}$与$\omega$的差别来达到，即$|t-1|$的大小. 如果$|t-1|$可调节的范围适当地大，那么$K^+$就可以不过分小. 这是使迭代收敛的关键. 另一方面，为了使扰动项充分小，我们必须在足够靠近$y=c$, $z=0$的地方研究问题. 这就要求$|t-1|$不能过分大. 幸运的是Eliasson在这两者之间找到适当的位置，以满足两方面的需要. 在克服这一困难之后，其他有关证明和经典KAM理论的证明类似，此处不再详述，读者可参见[16].

本书§10将考虑保体积映射中余维为1的不变环面的存在性. 程崇庆、孙义燧为解决那个问题而发展了一种技巧. 高维空间中低维频率映射的象中扭转的概念也可以应用于此问题，从而可以给出不同的证明. 实际上，(8.30)和(8.31)就是一种高维空间的扭转条件. 有兴趣的读者不妨一试.

在讨论过双曲型、椭圆型低维环面后，一个自然的问题是双曲-椭圆型低维环面的存在性. 设(8.2)式中$JA$的特征值有实部

为 0 者，也有不为 0 者. 与双曲型低维环面问题的提法不同，此处设(8.7)定义的 $\omega$ 满足若干个共振关系. 这时相应的哈密顿函数的主部所决定的方程具有双曲-椭圆型低维环面. 可以看出，将以上分别处理的两种方法结合起来，当可发展相应的理论.

## §9 柯尔莫哥洛夫非退化性条件与高维扭转条件

在经典 KAM 理论中，有两个条件是必要的，一是柯尔莫哥洛夫非退化性条件，二是光滑性条件. 从本书 §7 的证明可以看出，柯尔莫哥洛夫非退化性条件对于给定频率 $\omega$ 的不变环面存在性是至关重要的. 在每一步的迭代中，由于来自扰动项的平均部分，主部由 $N_m$ 变为 $N_m+[P_m]$. 为了保证在 $I_m^*$ 的附近方程

$$\frac{\partial}{\partial I}(N_m+[P_m])=\omega$$

有解，柯尔莫哥洛夫非退化性是必不可少的. 由 §7 的证明可以看出，要使一个指定频率的不变环面在扰动下仍然存在，扰动的大小 $d$ 与相应的 Diophantine 常数以及函数的解析区域大小有关. 按照 §8 的记号，当 Diophantine 常数 $D$ 充分小时，$DC_0(D)$ 勒贝格测度就足够大. 由定理(1.2)，存在一个正测集，它是由不变环面构成的. 如果不注意不变环面上的频率是否变化，而只是关心是否存在不变环面，不变环面的集合是否足够大，也许证明所需要的条件可以大大减弱. 读过阿诺尔德证明 KAM 定理一文的人也许会问，他也是直接证明集合的正测性的，但是在他的证明中柯尔莫哥洛夫非退化条件也是必不可少的. 然而，如果我们沿着 §7 中的证明思路再深入想一下，就可以发现柯尔莫哥洛夫非退化性条件不是必要的，而可以代之以一个弱得多的条件(我们不妨称其为**高维扭转条件**).

在叙述这一条件之前，我们首先回顾一下经典 KAM 证明中相关的几个要点.

第一，经过一次迭代，哈密顿函数的主部由 $N(I)$ 变成 $N_+(I) = N(I)+[P(I)]$. 由于没有柯尔莫哥洛夫非退化性条件，方程

$$\frac{\partial N_+}{\partial I}=\omega$$

在 $I^*$ 附近可能无解. 如果在下一步迭代中哈密顿函数的解析区域仍然以 $I^*$ 为中心，那么频率的变化 $\omega \to \left.\frac{\partial N_+}{\partial I}\right|_{I=I^*}=\omega_+$ 就会发生. 在一般情况下，$\omega \neq \omega_+$. $\omega_+$ 也许满足某种共振条件，或是刘维尔系数，即便在通有假设之下，$\omega_+$ 仍然满足某个 Diophantine 条件，但相应的 Diophantine 常数却比原先的小得多. 从(7.20)式可以看出，如果 $D$(Diophantine 常数)与迭代步数有关，迭代的超指数收敛性就会被破坏.

第二，在变换若干次以后，哈密顿函数仅仅定义在较小的区域 $\{|I_m\varphi|\leqslant\tau_m,\ |I-I_m^*|\leqslant S_m\}$ 内，$S_m$ 相当小. 可是，在最初哈密顿函数却是定义在一个相当大的区域上 $\{|I_m\varphi|\leqslant\tau,\ |I-I^*|\leqslant S,\ I^*\in D\}$，$D$ 是相当大的集合. 如果选取两个点 $I_a^*$ 和 $I_b^*$，相应的 $\omega(I_a^*)$ 和 $\omega(I_b^*)$ 都满足一定的 Diophantine 条件，在此两点附近都进行 KAM 迭代，在若干步以后即使 $I_0\in\{|I-I_{ma}^*|\leqslant S_m\}$，$I\in\{|I-I_{mb}^*|\leqslant S_m\}$，定义在 $\{|I_m\varphi|\leqslant\tau_m,\ |I-I_{am}^*|\leqslant S_m\}$ 上的哈密顿函数与定义在 $\{|I_m\varphi|\leqslant\tau_m,\ |I-I_{bm}^*|\leqslant S_m\}$ 上的哈密顿函数在 $I_0$ 的值是不一样的. 因为 KAM 迭代只能对满足 Diophantine 条件的那些点进行，所以在若干次迭代以后，哈密顿系统实际上是定义在象丛一样的集合上. 每一根纤维是像 $\{|I_m\varphi|\leqslant\tau_m,\ |I-I_{am}^*|\leqslant S_m\}$ 的集合，而底"流形"却是一个康托集.

我们再来看一下 $\mathbb{R}^n$ 中一个子流形上满足 Diophantine 条件的点集的相对勒贝格测度是否为正. 记

$$\Omega_D=\{\omega\in\mathbb{R}^n:\ |\langle k,\omega\rangle-l|\geqslant D|k|_1^{-\mu},\qquad \forall (k,l)\in\mathbb{Z}^{n+1}\setminus\{0\}\},$$

$$\tilde{\Omega}_L=\{\omega\in\mathbb{R}^n:\ |\langle k,\omega\rangle|\geqslant D|k|_1^{-\mu},\qquad \forall k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\}.$$

$\Omega_D$ 是通过在 $\mathbb{R}^n$ 中去除所有由方程

$$\langle k, \omega\rangle = l \qquad \forall (k, l) \in \mathbb{Z}^{n+1} \backslash \{0\}$$

决定的 $n-1$ 超平面的 $(D|k|_1^{-\mu}\|k\|^{-1})$-邻域而得到的，而 $\mathring{\Omega}_D$ 则是通过去除所有过原点的方向数为整数向量的 $(n-1)$ 维超平面的 $(D|k|_1^{-\mu}\|k\|^{-1})$-邻域而得到. 由此不难想象，对于一个弯曲子流形 $M$, $M\cap\Omega_D$ 以 $M\cap\mathring{\Omega}_D$ 的勒贝格测度仍然是正的. 这里的勒贝格测度，是指支集在 $M$ 的通常的勒贝格测度，如曲线的测度是弧长.

对于眼下的问题，我们没有必要去定义高维的弯曲子流形，而只需要定义一维弯曲曲线. 众所周知，在欧几里德空间 $\mathbb{R}^n$ 中，一条 $C^{n+1}$-光滑曲线可以用其弧长 $s$ 表示：

$$\gamma = (\gamma_1(s), \cdots, \gamma_n(s)),$$

在活动坐标架下，

$$x_1 = s + O(s^2),$$

$$x_2 = \frac{\beta_1}{2} s^2 + O(s^3),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$x_n = \frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}\beta_i s^n + O(s^{n+1}).$$

其中 $\beta_i$ 称为第 $i$ 阶曲率分量.

**定义 1** $\mathbb{R}^n$ 中一 $C^{n+1}$-曲线称为弯曲的，如果它的各阶曲率分量非零.

对于这样的弯曲曲线 $\gamma$, $\gamma\cap\Omega_D$ 的关于弧长的勒贝格测度是正的. 有关结果由下面引理表述：

**引理** 设一条 $C^{n+1}$-曲线 $g(s) = (g_1(s), g_2(s), \cdots, g_n(s))$, 其中 $s$ 为弧长, $s\in[0, L]$. 如果 $g(s)$ 满足下列条件：

(i) 它的直到 $(n+1)$ 阶导数都有界

$$\left|\frac{d^j g(s)}{ds^j}\right| \leqslant B, \quad 1\leqslant j\leqslant n+1, \ s\in[0, L]$$

(ii) 所有曲率分量下有界

$$|\beta_j(s)| \geqslant \beta > 0, \qquad 1\leqslant j\leqslant n, \ s\in[0, L]$$

那么，存在 $D^*>0$，如果 $D\leqslant D^*$，集合

$$\Omega_D^g=\bigcap_{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}([0,\ L]\setminus S_k^g(s)),$$

$$S_k^g=\{s\in[0,\ L]:\ |\langle k,\ g(s)\rangle+l|<D|k_1|^{-\mu},\ \mu\geqslant n(n+1)\}$$

是一个康托集，它的测度为

$$\operatorname{meas}(\Omega_D^g)\geqslant L(1-CB^{\frac{2n-1}{n}}\beta^{-\frac{n^2-1}{2}}D^{\frac{1}{n}}),\tag{9.1}$$

其中 $C$ 是只依赖于 $n$ 和 $\mu$ 的常数，

$$D^*=\min\left\{\left(\frac{\beta^{\frac{n^2-1}{2}}}{(2^{n-1}-1)2^{1+\frac{1}{n}}n^{1+\frac{1}{n}}B^{2-\frac{1}{n}}}\right)^n,\ \frac{\beta^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2B^{n-1}}\right\}.$$

引理的证明可见[14].

现在我们设哈密顿函数 $H(I,\ \varphi)=N(I)+P(I,\ \varphi)$ 定义在区域 $\{|I_m g|\leqslant\tau,\ |I-I_0|\leqslant s,\ I_0\in[0,\ L]\}$ 上．在频率映射 $\dfrac{\partial N}{\partial I}$ 之下，$[0,\ L]\in\mathbb{R}^n$ 的象是一条弯曲的曲线．根据引理，$[0,\ L]$ 中有一个正测集 $S_D$．相应的频率满足 Diophantine 关系．如果引进参数 $\lambda$，将哈密顿量写成含参数的形式：

$$H_0(I,\ \varphi,\ \lambda)=H(I+\lambda,\ \varphi),$$

对于固定的 $\lambda$，$H_0$ 只是定义在 $\{|I_m\varphi|\leqslant\tau,\ |I|\leqslant s\}$ 上．对 $\lambda\in S_D$，可以进行 KAM 迭代，$H_0(I,\ \varphi,\ \lambda)\to H_1(I,\ \varphi,\ \lambda)$，这时 $H_1$ 对 $\lambda$ 而言仅是定义在一个康托集上的函数．但是，它可以延拓到整个区间上．对相应的频率映射情况亦然．注意到 $N_1(I,\ \lambda)$ 对 $\lambda\in S_D$ 而言只是 $N_0(I,\ \lambda)$ 的微小修正，$\dfrac{\partial N_1}{\partial I}\{[0,L]\}$ 应仍然是一条弯曲的曲线，只是其各阶曲率分量有微小的改变．如果让 Diophantine 常数 $D_1$ 比 $D_0$ 小，$S_{D_1}\cap S_{D_0}$ 的测度仍可为正．这种迭代过程可以继续下去．注意到(7.20)式里 Diophantine 常数的作用，如果让 $D_m$ 以指数速度趋于 0，那么 $\bigcap_m S_{D_m}$ 的测度可以为正，对于 $\lambda\in\bigcap_m S_{D_m}$ 的点，KAM 迭代收敛，这表明在$[0,\ L]$中存在正测集，相应的 KAM 环面仍然存在．由这样一个简单的说明(远

不是论证)，我们引出下面的定义，

**定义 2** 设 $D\subseteq\mathbb{R}^n$ 是连通开集，一个实的解析映射如下：

$$f=(f_1, f_2, \cdots, f_n):\quad D\to\mathbb{R}^n.$$

我们称 $f$ 是扭转的，如果 $f(D)$ 包含有一条弯曲的曲线.

对于解析函数，上述定义等价于下面的提法：

不存在 $c=(c_1, c_2, \cdots, c_n, c_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$，使

$$c_1f_1(y)+c_2f_2(y)+\cdots+c_nf_n(y)=c_{n+1}.\qquad \forall y\in D$$

实际上，如果上式成立，$f$ 的象就只限于某一超平面，因而就不包括一个弯曲的曲线，反之亦然.

**定理 1** (程崇庆、孙义燧，1992) 设具有 KAM 型的哈密顿函数 $H=N(I)+P(I, \varphi)$ 在区域

$$\Sigma=\{|I_m\varphi|\leqslant\tau,\ |I-I_0|\leqslant s,\ I_0\in D\quad \text{open in } \mathbb{R}^n\}$$

上解析，并且关于 $\varphi$ 是 $2\pi$ 周期. 频率映射 $\partial N/\partial I$ 的秩是常数 $r\leqslant n$, $D+s$ 中任一开集在此映射下的象包含 $C^{n+2}$ 一维弯曲流形. 那么，对任意 $\varepsilon>0$，总存在 $d=d(\tau, s, D, N, \varepsilon)>0$，只要 $\sup\limits_{\Sigma}|P|<d$，存在一个正勒贝格测度集 $\Sigma^1\subset\mathrm{Re}(\Sigma)$，它是由关于方程

$$\dot{I}=-\frac{\partial H}{\partial\varphi},\quad \dot{\varphi}=\frac{\partial H}{\partial I}$$

不变的 $n$ 维环面 $T_\alpha$ 构成，这样的环面具有形式

$$I=I_\alpha+U_\alpha(\Phi),\quad \varphi=\Phi+V_\alpha(\Phi),$$

$U_\alpha$ 和 $V_\alpha$ 均在 $|I_m\Phi|\leqslant\frac{\tau}{2}$ 上解析，关于 $\Phi$ 是 $2\pi$ 周期. 哈密顿系统在这些不变环面上的运动是拟周期的，

$$\dot{\Phi}=\omega,\quad \omega=\frac{\partial N}{\partial I}(\alpha)+\omega^*(P),$$

其中 $\omega^*(0)=0$. 而且，这些环面只是未受扰系统 $H=N$ 的不变环面 $I=I_\alpha$ 的微小变形，

$$|U_\alpha|<\varepsilon,\quad |V_\alpha|<\varepsilon.$$

当 $d\to 0$ 时，$\Sigma^1$ 的勒贝格测度 $\mathrm{meas}(\Sigma^1)\to\mathrm{meas}(\mathrm{Re}(\Sigma))$.

**注记** 1. 集合 $D+s=\bigcup_{x\in D}B(x, s)$，其中 $B(x, s)$ 是中心在 $x$，半径为 $s$ 的开集.

2. 与具有柯尔莫哥洛夫非退化性条件的系统略有不同. 环面上的频率不一定正好是 $(\partial N/\partial I)(\alpha)$，而是有一点漂移 $\omega^*(P)$.

证明本定理可以利用为证明保体积变换中余维 1 不变环面存在性定理而发展的技巧(参见本书 § 10). 为了达到可利用的地步，我们需要找到集合 $D$ 的闭包的有限开覆盖，每一开集都可以分层为一族曲线，所有这些曲线在映射 $\partial N/\partial I=g_0$ 下的象都是一维弯曲曲线. 实际上，由于 $g_0$ 的秩是常数，假设为 $r$，对任意 $I\in D$，总存在 $I$ 附近的坐标卡 $\varphi$ 和 $g_0(I)$ 附近的坐标卡 $\psi$，相应的定义域为 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$，根据秩定理，映射 $\psi\circ g_0\circ\varphi^{-1}(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^n, 0)$ 具有形式 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)\to(x_1, x_2, \cdots, x_r, 0, \cdots, 0)$. 由假设条件，存在一个弯曲一维流形 $M\subset\mathbb{R}^n$，它可以参数化为 $\gamma$: $[a, b]\to M\subset\mathbb{R}^n$，并且 $d\gamma/ds\neq0$. 在坐标卡 $\mathscr{V}$ 之下，它包括在 $\psi\circ g_0(\mathscr{U})$ 之下，它显然被限制在 $\mathbb{R}^r$ 内. 再一次运用秩定理，可以看出在 $\psi\cdot g_0(I)$ 附近存在坐标卡 $\psi_1$，定义域为 $\mathscr{V}_1\subset\psi(\mathscr{V})\subset\mathbb{R}^r$，坐标卡 $\chi$，定义域在 $[a, b]$，这些映射的复合 $\psi_1\circ\psi\circ\gamma\circ\chi^{-1}$ 具有形式 $(y_1)\to(y_1, 0, \cdots, 0)$. 可以延拓 $\psi_1$: $\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^r$ 为从 $(\mathscr{V}_1\times\mathbb{R}^{n+})\cap\psi(\mathscr{V})$ 到 $\psi_1(\mathscr{V}_1)\times\mathbb{R}^{n-r}$ 的局部微分同胚: $\tilde{\psi}_1=(\psi_1, id)$，恒等作用到后 $n-r$ 个坐标上. 所有这些，可以用交换图表示如下:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathscr{U} & \xrightarrow{g_0} & \mathscr{V}\subset g_0(\mathscr{U}) & \quad & \supset M & \xrightarrow{\gamma} & [a, b] \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\psi & & \psi\downarrow & & \downarrow id \\ (x_1, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n) & \rightarrow & (x_1, \cdots x_r, 0, \cdots, 0) & & \psi(M) & \xrightarrow{\psi_0\nu} & [a, b] \\ \tilde{\psi}_1\downarrow & & \downarrow(\psi, id)=\tilde{\psi}_1 & & \tilde{\psi}_1\downarrow & & \downarrow\chi \\ (y_1, \cdots, y_r, x_{r+1}, \cdots, x_n) & \rightarrow & (y_1, \cdots y_r, 0, \cdots, 0) & & (y_1, 0\cdots0) & \leftarrow & (y_1) \end{array}$$

将这个过程反过来，我们便得到包含 $I$ 的开集的分层(foliation). 实际上，$\psi_1(\mathscr{V}_1)$ 可以想象成一族直线，通过固定 $y_2, \cdots, y_r$ 来达到. 在映射 $\psi_1^{-1}$ 之下，这引起了 $\mathscr{V}_1$ 上的分层，继而引起 $\psi^{-1}(\mathscr{V}_1)$

$\subset g_0(\mathscr{U})$上的分层. $M\cap\psi^{-1}(\mathscr{V}_1)$理所当然是其中的一曲线. 另一方面，将包含$\phi(\mathscr{U})$的$\mathbb{R}^n$和包含$\psi(\mathscr{V})$的$\mathbb{R}^n$等同看待，我们便得到集合$\mathscr{U}^1=\phi(\mathscr{U})\cap(\mathscr{V}_1\times\mathbb{R}^{n-r})$上的分层：它可以认为是将超平面(通过固定$x_{r+1},\cdots,x_n$)粘合在一起而得到的. 每一超平面都有像$\mathscr{V}_1$上一样的分层而成为一族曲线. 在映射$\varphi^{-1}$之下，我们得到$I$的一个开邻域，它是由一族曲线组成：

$$\Gamma(\tau,\alpha)=\phi^{-1}\circ\tilde{\psi}_1^{-1}(\mathscr{S}_\alpha),$$

其中 $$\alpha=(y_2,\cdots y_r,x_{r+1},\cdots x_n),\quad \tau=y_1,$$

$$\mathscr{S}_\alpha=\{\tau\in(a_\alpha,b_\alpha):\alpha=\text{constant},\ (\tau,\alpha)\in\tilde{\psi}_1(\mathscr{U}^1)\}.$$

显然，在映射$g_0$下，这一族曲线的象成为$\psi^{-1}(\mathscr{V}_1)$的一个分层，$g_0$是$\Gamma_\alpha$和其象之间的同胚. 由于所有的坐标卡，映射都是光滑的，$M\cap\psi^{-1}(\mathscr{V}_1)$一定有一开邻域，其中每一根纤维的所有曲率分量非零. 将这个开集适当缩小，我们可以使每一根这样的纤维(曲线)都具有以下的性质：

P1. 所有曲线$\Gamma_\alpha$的长度下有界：

$$\inf_\alpha\int_{a_\alpha}^{b_\alpha}\sqrt{\left\|\frac{d\Phi}{d\tau}(\tau,\alpha)\right\|}d\tau\geqslant L>0,$$

其中$\Phi=(\Phi_1,\cdots\Phi_n)=\varphi^{-1}\circ\tilde{\psi}_1^{-1}$. 如果$\Gamma_\alpha$用其弧长$s$参数化，$\Gamma(\tau,\alpha)=\Gamma_\alpha(s)$，那么对$1\leqslant j\leqslant n+1$,

$$\sup_{\alpha,s}\left|\frac{d^j\Gamma_\alpha}{ds^j}\right|\leqslant B_\Gamma,$$

$$\sup_{\alpha,s}\left|\frac{d^j\Gamma_\alpha}{ds^j}(s_1)-\frac{d^j\Gamma_\alpha}{ds^j}(s_2)\right|\leqslant B_\Gamma|s_1-s_2|^{n+2-j};$$

P2. 所有曲线$g_0(\Gamma_\alpha)$都长于$bL$，因为假设

$$\inf_{\alpha,s}\left\|\frac{dg_0(\Gamma_\alpha)}{ds}\right\|\geqslant b>0;$$

P3. 关于$s$的不高于$(n+1)$的导数有界：

$$\sup_{\alpha,s}\left|\frac{d^jg_0}{ds^j}\right|\leqslant B,$$

$$\sup_{\alpha,s}\left|\frac{d^jg_0}{ds^j}(s_1)-\frac{d^jg_0}{ds^j}(s_2)\right|\leqslant B|s_1-s_2|^{n+2-j};$$

P4. 所有$g_0(\Gamma_\alpha)$的所有曲率分量下有界:

$$\inf_{\alpha,s}|\beta_j(y_0(\Gamma_\alpha(s)))|\geqslant\beta>0.$$

我们一般考虑$D$是有界集,因此存在有限个开集$D_1$覆盖$\overline{D}$. 因此, 我们可以将问题限制在$D_1$上, 如果P1~P4均在$D_1$上成立. 实际上,在证明不变环面存在性过程中,扰动项的大小只依赖于P1~P4以及解析区域的大小,由$u$和$v$表示,

$$\Sigma_{\Gamma_\alpha}=\{|I_m\psi|\leqslant u,\ |I-I_0|\leqslant v,\ I_0\in\Gamma_\alpha(s)\}.$$

如果对任意$\alpha$, $\Gamma_\alpha$满足P1~P4, 都存在$\Gamma_\alpha$上的正测集, 相应的KAM环面都存在, 那么对$D$里的正测度集(相应KAM环面也存在)的存在性就是十分明显的了.

余下的证明方法是利用了§10中为证明余维1的不变环面存在性定理而发展的技巧,此处略去,有兴趣的读者可以参看[14].

## §10 只有一个作用量的保体积变换

众所周知,哈密顿系统只是一种保守系统,它具有辛结构. 前面已经介绍了哈密顿系统中的KAM理论. 对于不具有哈密顿结构而只是保体积的变换情况又是怎样呢?我们知道,保体积变换是比哈密顿系统广泛得多的系统. 自然界有许多系统的数学模型仅仅具有保体积性, 而没有哈密顿结构. 例如三维不可压缩周期流便是一例. 下面将建立保体积变换的不变环面的存在性定理.

在本世纪80年代初,孙义燧对近可积三维保测度(体积)映射进行了数值研究. 他发现在一个不变曲线附近有许多不变环面,这些环面的结构极像KAM理论所显示的那样. 但是, 这是一个不具有哈密顿结构的系统. 1988年, 程崇庆和孙义燧[12]从理论上严格证明了这种不变环面的存在性. 在此之后, M. Herman[24],[57],[58]和夏志宏[56]把这种理论推广到只有一个作用量但具有任意有限个角变量的系统. 实际上, 程和孙研究的三维

保体积映射中具有一个作用量，两个角变量．利用他们的证明方法，可以毫无困难地证明具有任意有限个角变量的系统，一个作用量是关键．Herman 和夏志宏的方法要简单一些．

我们考虑一个定义在 $I\times\mathbb{T}^2$ 上的保体积映射 $M$：$(x, y, z)\to(x_1, y_1, z_1)$，

$$M_0\quad\begin{aligned} x_1&=x+f_0(z)+X_0(x, y, z),\\ y_1&=y+g_0(z)+Y_0(x, y, z),\\ z_1&=z+\qquad\quad Z_0(x, y, z).\end{aligned}\tag{10.1}$$

其中 $(x, y)\in\mathbb{T}^2$，$z\in I=[a, b]$，$f_0$，$g_0$，$X_0$，$Y_0$ 和 $Z_0$ 都是在区域

$$D_0=\{|I_m x|\leqslant r,\ |I_m y|\leqslant r,\ |z-z_0|\leqslant s,\ z_0\in[a, b]\}\tag{10.2}$$

上的解析函数，$|X_0|+|Y_0|+|Z_0|\leqslant\varepsilon$，$\varepsilon>0$ 充分小．

(10.1)定义的映射有它的几何和物理背景．设在 $\mathbb{R}^3$ 中的一个保体积映射有一个不变闭曲线 $\gamma$，并且这个映射，还是一个微分同胚．将映射限制在此闭曲线上，我们便得到一个圆周上的同胚映射．如果此映射在圆周上的旋转数是无理数，根据 Denjoy 理论，此映射拓扑共轭于一个刚体旋转．即存在微分同胚 $\varphi$：$\mathbb{T}^1\to\mathbb{T}^1$ 使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{T}^1 & \xrightarrow{M|_{\mathbb{T}^1}} & \mathbb{T}^1\\ \varphi\downarrow & & \downarrow\varphi\\ \mathbb{T}^1 & \xrightarrow{+\omega} & \mathbb{T}^1\end{array}$$

在此情况下，如果此闭曲线上的映射法向式是椭圆型的，此保体积微分同胚就可以化为(10.1)的形式．$x$ 可以取为不变曲线 $\gamma$ 的弧长，$y$ 可以取为围绕 $\gamma$ 的角度，而 $z$ 则是到 $\gamma$ 的距离．对于研究周期性不可压缩流体，像泰勒-Couette 流，到目前为止人们尚未能找到适当的具有哈密顿结构的数学模型来描述，但却可以放到三维保体积映射这样一个大框架之下，Mezic 和 Wiggins[36]、

R. Mackay[33] 得到了具有(10.1)形式的数学模型.

在证明像(10.1)这样的系统具有余维1(即只比相空间低一维)的不变环面之前, 人们习惯上认为这种 Diophantine 环面只存在于哈密顿系统之中(包括辛映射, 可逆系统(reversible system)也是与哈密顿系统极相似的系统). 然而, 经典的 KAM 理论在证明方法上多大程度利用了哈密顿结构?

我们知道, KAM 理论证明的关键, 是利用牛顿迭代法构造一个坐标变换的无穷序列, 这一系列变换的复合收敛于一个有意义的变换, 它将 $\mathbb{T}^n$ 映射嵌入到 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^n$ 中, 其切映射正好将 $\mathbb{T}^n$ 上的常数向量场 $\omega$ 映射到 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^n$ 上由哈密顿方程定义的向量场. 这一系列变换的复合必须收敛是前提. 对于多自由度哈密顿系统, 这一点是由利用寻找母函数 $W(I_1, \varphi)$ 而达到的(见(7.9)式). 在那里, 由于每次迭代的母函数 $W$ 及其一、二阶导数以超指数速度趋于 0, 相应变换的复合也就收敛. 对于二维扭转映射, 所谓相交性(一个围绕原点的闭曲线在此映射下的象与原象相交)保证了这一点(Calabi 不变量为 0), 详情见莫泽的有关证明[51]. 除去这一点, 系统的哈密顿结构并不对 KAM 理论的证明有什么贡献.

在§7经典 KAM 理论的叙述证明中, 旋转向量 $\omega$ 的 Diophantine 常数是固定的. 之所以可以如此, 主要是因为哈密顿系统的柯尔莫哥洛夫非退化性. 若没有这一条件, 在每一步的迭代中相应的 Diophantine 常数就可能变化. 这是在分母上的常数, 如果此常数随迭代次数而以比超指数快的速度趋于 0, 整个超指数迭代收敛的计划就可能破产. 但是, 这一困难与是否有哈密顿结构无关. 如果仍然利用牛顿迭代法, 通过寻找一个无穷的变换序列来证明3维保体积变换中2维不变环面的存在性, 上述困难固然不可避免, 但并不是不可解决. 换一个角度来看待(10.1)式是有帮助的. 将(10.1)式看成一族保体积映射而不是一个保体积映射:

$$x_1=x+f(z, \omega)+X(x, y, z, \omega),$$

$$M_0(\omega) \quad y_1=y+g(z,\ \omega)+Y(x,\ y,\ z,\ \omega), \qquad (10.1)$$
$$z_1=z+Z(x,\ y,\ z,\ \omega).$$

有关函数$f_0$, $g_0$, $X$, $Y$, $Z$是$x$, $y$的$2\pi$周期函数,并且在区域

$$D_0(\omega)=\{|\mathrm{Im}x|\leqslant r,\ |\mathrm{Im}y|\leqslant r,\ |z|\leqslant s\}$$

上解析,$f_0(z,\ \omega)=f_0(z+\omega)$,$X(x,\ y,\ z,\ \omega)=X_0(x,\ y,\ z+\omega)$,其余类推.对于固定的$\omega$,如果它满足Diophuntine条件,

$$|k_1f_0(0,\ \omega)+k_2g_0(0,\ \omega)+n|\geqslant K_0(|k_1|+|k_2|)^{-\mu},$$
$$\forall(k_1k_2n)\in\mathbb{Z}^3\backslash\{0\}, \qquad (10.2)$$

我们引进坐标变换

$$\begin{aligned} & x=\varphi+U(\varphi,\ \psi,\ \eta,\ \omega), \\ T_0(\omega) \quad & y=\psi+V(\varphi,\ \psi,\ \eta,\ \omega), \qquad (10.3) \\ & z=\eta+W(\varphi,\ \psi,\ \eta,\ \omega), \end{aligned}$$

进而得到一个新的变换

$$M_1(\omega)=T^{-1}(\omega)M_0(\omega)T(\omega).$$

在较小的区域上解析:

$$D_1=\{|\mathrm{Im}\varphi|\leqslant\rho<r,\ |\mathrm{Im}\psi|\leqslant\rho<r,\ |\eta|\leqslant\sigma<s\}.$$

具体形式为:

$$\begin{aligned} & \varphi_1=\varphi+f_0(\eta,\ \omega)+f_1(\eta,\ \omega)+\Phi(\varphi,\ \psi,\ \eta,\ \omega), \\ & \psi_1=\psi+g_0(\eta,\ \omega)+g_1(\eta,\ \omega)+\Psi(\varphi,\ \psi,\ \eta,\ \omega), \qquad (10.4) \\ & \eta_1=\eta+H(\varphi,\ \psi,\ \eta,\ \omega). \end{aligned}$$

其中$U$、$V$和$W$满足如下方程:

$$\begin{aligned} & U(\varphi+f_0(0,\ \omega),\ \psi+g_0(0,\ \omega),\ \eta,\ \omega)-U(\varphi,\ \psi,\ \eta,\ \omega) \\ & \quad =X(\varphi,\ \psi,\ \eta,\ \omega)+f'_{0\eta}(\eta,\ \omega)W(\varphi,\ \psi,\ \eta,\ \omega) \\ & \quad\quad -f_1(\eta,\ \omega); \\ & V(\varphi+f_0(0,\ \omega),\ \psi+g_0(0,\ \omega),\ \eta,\ \omega)-V(\varphi,\ \psi,\ \eta,\ \omega) \\ & \quad =Y(\varphi,\ \psi,\ \eta,\ \omega)+g'_{0\eta}(\eta,\ \omega)W(\varphi,\ \psi,\ \eta,\ \omega) \\ & \quad\quad -g_1(\eta,\ \omega); \\ & W(\varphi+f_0(0,\ \omega),\ \psi+g_0(0,\ \omega),\ \eta_1,\ \omega)-W(\varphi,\ \psi,\ \eta,\ \omega) \\ & \quad =Z(\varphi,\ \psi,\ \eta,\ \omega)-\tilde{Z}(\eta,\ \omega); \qquad (10.5) \end{aligned}$$

$$f_1(\eta,\omega)=\widetilde{X}(\eta,\omega)+f'_{0\eta}(\eta,\omega)\widetilde{W}(\eta,\omega),$$
$$g_1(\eta,\omega)=\widetilde{Y}(\eta,\omega)+g'_{0\eta}(\eta,\omega)\widetilde{W}(\eta,\omega). \qquad (10.6)$$

$\widetilde{X}$、$\widetilde{Y}$ 和 $\widetilde{Z}$ 是 $X$、$Y$ 和 $Z$ 关于 $x$、$y$ 的平均值. $M_1$ 中不可积项 $\Phi$、$\Psi$ 和 $H$ 是如下方程式的解:

$$\begin{aligned}\Phi=&U(\varphi+f_0(0,\omega),\psi+g_0(0,\omega),\eta,\omega)-U(\varphi_1,\psi_1,\eta_1,\omega)\\&+X(\varphi+U,\psi+V,\eta+W,\omega)-X(\varphi,\psi,\eta,\omega)\\&+\frac{1}{2}f''_{0\eta^2}(\eta+\lambda_1W)W^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi=&V(\varphi+f_0(0,\omega),\psi+g_0(0,\omega),\eta,\omega)\\&-V(\varphi_1,\psi_1,\eta_1,\omega)+Y(\varphi+U,\psi+V,\eta+W,\omega)\\&-Y(\varphi,\psi,\eta,\omega)+\frac{1}{2}g''_{0\eta^2}(\eta+\lambda_2W)W^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H=&W(\varphi+f_0(0,\omega),\psi+g_0(0,\omega),\eta,\omega)\\&-W(\varphi_1,\psi_1,\eta_1,\omega)+Z(\varphi+U,\psi+V,\eta+W,\omega)\\&-Z(\varphi,\psi,\eta,\omega)+\widetilde{Z}(\eta,\omega)\end{aligned}$$

先由(10.5)式中第三方程式确定 $W$, 然后再分别由第一、二式确定 $U$, $V$. 形式解仍然利用傅里叶展式得到, 而其上界估计也是利用经典的柯西估计得到, 详细证明可见[12]、[51].

仍然利用经典的方式, 不难得到 $D_1$ 上不可积项的上界:

$$\begin{aligned}|\Phi|+|\Psi|+|H-\eta|<&\frac{c_1}{K_0^2}(r-\rho)^{-2\mu-5}\left(\frac{\varepsilon_0^2}{s}+s\varepsilon_0\right)\\&+c_1\left(\frac{\sigma}{s}\right)^3\varepsilon_0+\frac{c_1}{K_0^4}(r-\rho)^{-4\mu-10}\frac{\varepsilon_0^2}{s^2}\\=&Q. \qquad (10.7)\end{aligned}$$

其中 $h=\widetilde{Z}(0,\omega)+\widetilde{Z}_\eta(0,\omega)\eta+\frac{1}{2}\widetilde{Z}_{\eta^2}(0,\omega)\eta^2$, $c_1$ 为常数, 仅依赖于 $\mu$. 由于 $M_0$ 是保体积映射, 因此任一余维 1 的环面 $\mathbb{T}$: $\eta=$ const. 在 $M_1$ 之下的象 $M_1\mathbb{T}$ 必定与 $\mathbb{T}$ 相交, 即 $\mathbb{T}\cap M_1\mathbb{T}\neq\varnothing$. 因此和莫泽关于不变曲线存在性中利用相交性的证明方法类似, 可以证明[12]

$$|\Phi|+|\Psi|+|H|<8Q. \tag{10.8}$$

值得注意：从(10.7)到(10.8)的过程充分利用了环面只比空间低一维，以及映射 $M_0$ 是保体积这两个性质.

经过一次迭代变换之后，定义在 $D_1$ 上的映射 $M_1$ 具有(10.4)的形式. 如果略去扰动项 $\Phi$、$\Psi$ 和 $H$，则 $M_1$ 也是可积系统. 与 $M_0$ 有所不同的是，对于同一参数 $\omega$，相应不变环面上的旋转数发生漂移 $(f_0(0, \omega), g_0(0, \omega))\to(f_0(0, \omega)+f_1(0, \omega), g_0(0, \omega)+g_1(0, \omega))$，这就给下一次迭代变换造成困难，因为 $((f_0+f_1)(0, \omega), (g_0+g_1)(0, \omega))$ 也许不满足 Diophantine 条件(10.2)，或者即使满足，相应的 Diophantine 常数 $K_1$ 比 $K_0$ 小得多. 注意到此常数出现在(10.7)式中的分母上，这种漂移可能导致整个迭代不收敛. 然而，如果对于某一固定的 $\omega$，每一步迭代中的 Diophantine 常数以比超指数慢的速度趋于 0，则经典的 KAM 迭代可以在这一点附近进行. 从而可以证明相应于 $\omega$ 的不变环面的存在性. 对于具有柯尔莫哥洛夫非退化性的哈密顿系统，可以通过调整 $I_0\to I_1$，使得相应的频率不动. 而像这样仅有一个作用量的系统，是无法做到这一点的.

现在考虑所有 $\omega\in S_i\subset[a, b]$，使得 $(\sum^{i} f_j(\omega), \sum^{i} g_j(\omega))$ 满足 Diophantine 条件. 在所有的这些点附近进行 KAM 迭代，若干步以后，这个映射只是定义在像丛一样的结构上，每一片叶子是 $\{|\mathrm{Im}\varphi|\leqslant r_i, |\mathrm{Im}\psi|\leqslant r_i, |r|\leqslant s_i\}$，而“底流形”是一个康托集 $S_i$，也可以说我们得到一族依赖于参数 $\omega$，而 $\omega$ 只对某一康托集有定义的映射.

为了继续证明过程，需要引进有关惠特尼(Whitney)连续性的概念. 一个定义在闭集上的函数如果满足一定的“连续可微性”，此函数可以延拓到一个区间上，而成为真正的连续可微函数.

**定义** 设 $S$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一闭集，$H^{m,\alpha}(S)$ $(m\in\mathbb{Z}_+^n, 0<\alpha\leqslant1)$ 是定义在 $S$ 上的一函数类 $\{u_l\}$，每一元素实际上是一组函数 $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$，它满足

$$|u_k(x)| \leqslant M, \quad |u_k - P_k(x, y, u)| \leqslant M|x-y|^{m-|k|-\alpha},$$
其中$|k| = |k_1| + |k_2| + \cdots + |k_n|$,
$$P_k(x, y, u) = \sum_{|l+k|<m} u_{k+l}(y) \frac{(x-y)^l}{l!}.$$
定义$u$在$H^{m,\alpha}(S)$上的模为
$$\|u\|_{m,\alpha,S} = \inf M.$$
对于定义在开集$I \subset \mathbb{R}^n$上的函数，$H^{m,\alpha}(I)$是这样一个函数类$\{u\}$，它具有$m$，$\alpha$阶霍尔德尔(O. Hölder)连续可微性:
$$|u^{(l)}(x)| \leqslant M, \quad |u^{(l)}(x) - P_l(x, y, u)| \leqslant M|x-y|^{m-|k|+\alpha},$$
$\mu^{(l)}$是$u$的$l$阶导数. $H^{m,\alpha}(I)$上的模定义为
$$\|u\|_{m,\alpha,I} = \inf M.$$
**定理1**（惠特尼） 对每一闭集$S$以及正整数$m$，设$\{u_l(s, x)\}$关于$s$属于$H^{m,\alpha}(S)$，而关于$x$解析. 存在一个线性延拓算子
$$\mathscr{R}: H^{m,\alpha}(S) \to H^{m,\alpha}(I): u \to U = \mathscr{R}u,$$
使得$U(s, x)$关于$x$仍然解析，$U^{(l)}(s, x)|_S = u_l(s, x)$，而且
$$\|U\|_{m,\alpha,I} \leqslant c\|u\|_{m,\alpha,S}.$$
式中$c$是一个只依赖于$m$，$\alpha$的正常数.

现在我们再回到不变环面存在性的证明. 注意到(10.1)′，映射$M_0$关于$\omega$无疑具有惠特尼(H. Whitney)连续性. 如果仅仅在那些$\omega \in S$上进行迭代，$M_1$关于$\omega$就仅定义在一闭集$S$上. 但是，可以证明：如果$X$、$Y$和$Z$关于$\omega$具有惠特尼连续可微性，则(10.5)的解$U$、$V$和$W$关于$\omega$也具有这种性质，$\Phi$，$\Psi$，$H$，$\Sigma f_i$和$\Sigma g_i$也具有这种性质. 相应的估计见[14]. 注意到(10.6)式，对于$\omega \in S$，每次迭代产生的频率漂移
$$\left(\sum_{i=1}^{k} f_i(0, \omega), \sum_{i=1}^{k} g_i(0, \omega)\right) \to \left(\sum_{i=1}^{k+1} f_i(0, \omega), \sum_{i=1}^{k+1} g_i(0, \omega)\right)$$
足够小，并以超指数速度趋于0，只要在上一步迭代中不可积项也以超指数速度趋于0. 按照定理(4.2)，可以将$\Sigma f_i$、$\Sigma g_i$延拓到$[a, b]$上，如果$\left(\sum_{i=1}^{k} f_i, \sum_{i=1}^{k} g_i\right)$在$\mathbb{R}^2$中是一曲率不为0的曲线，

$(\sum^{k+1} f_i,\ \sum^{k+1} g_i)$ 也是一个曲率不为 0 的曲线，两者的曲率之差以超指数速度趋于 0.

如果 $(f_0,\ g_0)$ 是一曲率不为 0 的曲线，这可以由条件

$$\det\begin{vmatrix} f_0', & g_0' \\ f_0'', & g_0'' \end{vmatrix} \geqslant c > 0 \tag{10.9}$$

来保证[56]，集合

$$S_k(\omega)=\{\omega\in[a,\ b]:\ |k_1f_0(\omega)+k_2g_0(\omega)+n|\geqslant K|k|^{-\mu}\quad \forall(k,\ n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}\}$$

对足够小的 $K$，$S_k(\omega)$ 是一康托集，其勒贝格测度

$$\text{meas}\, S_k(\omega)>1-c_1(K/c)^{1/2}. \tag{10.10}$$

证明见[12]，[14]．如果让每一次迭代变换中的 Diophantine 常数 $K_j$（其中 $K_j=K_0/2^{j+1}$）以指数速度收敛于 0，牛顿迭代的超指数收敛性仍然保留，见(10.7)式．如果前 $m$ 次迭代是交集 $\bigcap\limits_{j=0}^{m} S_{k_j}(\omega)$ 上进行，那这种迭代总是可以的．另一方面，

$$\text{meas}\left(\bigcap_{j=0}^{\infty} S_{k_0}(\omega)\right)>1-c_2\left(\frac{K_0}{c}\right)^{1/2}.$$

如果 $K_0$ 选得充分小，这个无穷集合的交集之测度为正！在这个正测度集中，相应于每一个 $\omega$ 的不变环面都存在，这就是如下的余维 1 不变环面存在性定理．

**定理 2**（程崇庆、孙义燧，1990）　设保体积映射 $M_0$（如(10.1)式定义）满足下列性质：

（i）在 $D_0$ 上实解析；

（ii）满足高维扭转条件(10.9)．

那么，存在一正数 $d_0>0$，依赖于 $(D_0,\ c)$，如果在 $D_0$ 上

$$|X_0|+|Y_0|+|Z_0|\leqslant d_0,$$

映射 $M_0$ 具有一族不变环面，具有如下形式

$$\begin{aligned} x&=\xi+u(\xi,\ \zeta,\ \omega),\\ y&=\zeta+v(\xi,\ \zeta,\ \omega)\\ z&=w(\xi,\ \zeta,\ \omega) \end{aligned} \tag{10.11}$$

$u, v$ 和 $w$ 均是在 $\left\{|\mathrm{I}_m\xi| \leqslant \frac{r_0}{2},\ |\mathrm{I}_m\zeta| \leqslant \frac{r_0}{2}\right\}$ 上的实解析 $2\pi$ 周期函数. 在每一个环面上, 映射 $M_0$ 可以参数化, 表示成为一个拟周期运动

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi + f_0(\omega) + f^*(\omega,\ X_0,\ Y_0,\ Z_0),\\ \zeta_1 &= \zeta + g_0(\omega) + g^*(\omega,\ X_0,\ Y_0,\ Z_0).\end{aligned} \tag{10.12}$$

其中 $f^*(\omega, 0) = g^*(\omega, 0) = 0$, $\omega \in S_\omega \subset [a, b]$, $S_\omega$ 是一个具有正测度的康托集, 当 $d_0 \to 0$ 时 $\mathrm{meas}(S_\omega) \to b - a$.

值得指出, 此处我们虽然证明了充分多不变环面的存在性, 但是每一环面上的拟周期频率却无法确定. 另外, 即使 $(f_0(0, \omega), g_0(0, \omega))$ 满足 Diophantine 条件, 我们也不能断定相应的环面在充分小的扰动下会保存下来.

如上的证明方法可以无本质困难地推广到具有 $n$ 个角变量, 但只有一个作用量的保体积映射, 去证明 $n+1$ 维保体积映射中 $n$ 维不变环面的存在性. $M$: $(r_1, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) \to (R, \Phi_1, \Phi_2, \cdots \Phi_n)$, $R = r + V(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$,

$$M:\ \Phi_i = r + g_i(r) + U_i(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_n). \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

如果此映射满足高维扭转条件[56]:

$$\det\begin{pmatrix} g_1'(r) & g_2'(r) & \cdots\cdots & g_n'(r) \\ g_1''(r) & g_2''(r) & \cdots\cdots & g_n''(r) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_1^{(n)}(r) & g_2^{(n)}(r) & \cdots\cdots & g_n^{(n)}(r) \end{pmatrix} \geqslant c > 0 \tag{10.13}$$

当 $\sum|U_i| + |V|$ 充分小时有充分多 $n$ 维不变环面. (10.13)式意味着曲线 $(g_1(r), g_2(r), \cdots, g_n(r))$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的各阶曲率分量不为 0.

J. Yoccoz 在 1994 年瑞士苏黎世召开的世界数学家大会上指出[58], 如今看来, Diophantine 环面的重要性已经远远超出只具有辛结构的系统范畴. 其中原因之一, 便是这种环面的存在性直

接否定了源于玻尔茨曼、麦克斯韦、庞加莱以及伯克霍夫的拟遍历性猜测(quasi-ergodic). 这是一个通有性猜测, 即对于保测度映射空间而言, 如果赋予此空间 $C^m$ 拓扑, 那么存在一个集合 $\mathscr{F}$, 它是可数多开稠集的交, 如果映射 $M\in\mathscr{F}$, 此映射一定有一条稠轨道. 由于现在已经证明, 对于一个可积的余维 1 保体积映射, 只要扰动充分小, 无穷多余维 1 的不变环面都存在. 这种只比空间低一维的不变环面将空间分成互不连通的两部分, 因而稠轨道是不可能存在的. 以 $C^m$ 拓扑而言, 在此可积映射的一个开邻域内每个映射均不具有稠轨道. M. Herman[23],[24] 还利用此定理否定了 Pesin 关于保体积映射具有正的李雅普诺夫指数的猜测, 这也是一个通有性猜测. 这两个猜测在此之前都是被乐观地认为是正确的. 值得注意, 利用经典的 KAM 理论是不能否定在哈密顿系统范畴内这两个猜测的.

## §11 共振区中的低维不变流形

本书 §7～§10 中我们研究了最大维数不变环面的存在性. 对于 $n$ 个自由度哈密顿系统, $n$ 维不变环面的存在性已由 KAM 理论证实. 在这些环面上, 拟周期流的频率满足非共振条件. 如果这些频率满足一定的共振关系, 人们相信相应的 $n$ 维不变环面在扰动之下被破坏, 不再存在. 然而, 在此区域中就不再存在规则运动, 一切都是混乱的吗? 情况并非如此. 现在看来, 尽管最大维环面遭扰动破坏, 然而一些低维的环面依然存在, 它们构成一个骨架, 其稳定、不稳定流形直接支配着阿诺尔德扩散行为.

首先研究一个较简单的系统, 二维扭转映射. 它相当于两个自由度的自治哈密顿系统. 在等能量面上取庞加莱截面. 设 $M$: $(r,\varphi)\mapsto(r_1,\varphi_1)$, $(\varphi\in\mathbb{T},\ r\in\mathbb{R})$是近可积形式:

$$M:\ \begin{aligned} r_1&=r+\varepsilon R(r,\varphi),\\ \varphi_1&=\varphi+g(r)+\varepsilon\Phi(r,\varphi). \end{aligned}$$

如果 $\varepsilon=0$，整个系统当然是可积的．如果 $\varepsilon\neq0$，KAM 理论指出：存在充分多的不变曲线（相应于勒贝格测度而言）．但是，如果 $r\in[a, b]$，使得 $g(r_0)=\frac{p}{q}$，$p$、$q$ 是互素的整数，相应的不变环面在一般情况下是不存在的[48]．然而，著名的伯克霍夫（G. D. Birkhoff）不动点定理指出，在 $r=r_0$ 附近，$M$ 至少有两组 $q$ 周期轨道，它的基本思想是寻找一个围绕原点的闭曲线 $\gamma$，这个闭曲线上的每一点在 $M^q$ 映射之下只是经向移动，即 $\varphi$ 保持不变．由于 $M^q$ 是保面积的，所以 $M^q\gamma\cap\gamma\neq\varnothing$．这个交集是 $M^q$ 的不动点集，它至少含有两个点．这些点便是 $M$ 的周期轨．这个证明方法非常巧妙，充分利用了平面这样一个低维空间的性质．到目前为止，尚看不出这种技巧在高维空间应用的可能性．读者欲知详情，可以参见[51]．

对于任意 $n$ 个自由度的哈密顿系统，情况比较复杂．对于一个旋转向量 $\omega\in\mathbb{R}^n$，可以存在多于一个的相互独立的共振关系．换句话说，存在 $m$ 个相互线性独立的整数向量（$K_1, K_2, \cdots, K_m$，$m<n$，$K_i\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$），使得

$$\langle K_j, \omega\rangle=0, \qquad \forall j\leqslant m \quad (11.1)$$

对应于此旋转向量，未受扰哈密顿系统的不变环面由一族 $(n-m)$ 维的低维不变流形组成．如果 $m=n-1$，这个大不变环面可以分层为一族周期轨道，这是一个极端情况．类似于扭转映射，对于凸的哈密顿系统，D. Berstein 和 A. Katok 在 1987 年证明至少有 $n$ 个周期轨道能够在扰动后存留下来，他们称之为伯克霍夫周期轨．详细证明见[8]．

现在我们考虑 $m<n-1$ 这种情况．这时 $n-m$ 维不变流形不是周期轨．在此流形上，未受扰哈密顿系统定义的流有一个频率．为了明确表示这个关系，我们可以引进一个么模矩阵，它的每一个元素均是正整数

$$K=(K_1, K_2, \cdots, K_n)$$

其中 $K_1, K_2, \cdots, K_m$ 是使共振关系(11.1)成立的向量. 利用此矩阵，我们可以定义一个从 $\mathbb{T}^{n-m}$ 到 $\mathbb{T}^n$ 的内射:

$$\mathscr{H}_\xi: (x_1, x_2, \cdots, x_{n-m}) \to \varphi = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-m}, \xi) K^{-1}, \tag{11.2}$$

$\xi \in \mathbb{T}^m$ 作为参数. 这个映射是 $\mathbb{T}^{n-m}$ 到某一个$(n-m)$维不变流形的微分同胚，具体到哪一个不变流形由 $\xi$ 决定. 这个微分同胚定义了 $\mathbb{T}^{n-m}$ 上的拉回(pull back)流 $\Phi_t^*$:

$$\mathscr{H}_\xi \Phi_t^*(0) = \Phi_t.$$

$\Phi_t$ 是未受扰哈密顿系统定义的流. $\Phi_t^*$ 显然也是拟周期的. 其频率向量 $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_{n-m})$ 由下式决定:

$$(0, \Omega) = \omega K. \tag{11.3}$$

如果哈密顿系统具有柯尔莫哥洛夫非退化性, $\dfrac{\partial N_0}{\partial I}$ 是局部微分同胚. 如果 $\dfrac{\partial N_0}{\partial I}(I_0) = \omega$, 在作用量空间中经过 $I_0$ 点有一个$(n-m)$维流形 $m$, 使得共振关系(11.1)总是成立的. 这就是所谓的共振层. 显然较少共振关系的共振层 $m_{m_1}$ 总是包含较多共振关系的共振层 $m_{m_2}(m_1 < m_2)$而最高维的共振层便是$m=1$, 只有一个共振关系. 和 §7 中定理 1 的证明一样, $m_r$ 上的几乎所有点都满足某一 Diophantine 条件(相对于此流形的勒贝格测度而言). 注意, 这里的频率是指拉回频率 $\Omega$.

对于凸的哈密顿系统, 当仅存在一个共振关系时, 下列结果已经得到.

**定理 1** (程崇庆 1994) 设 KAM 型的哈密顿系统 $H(I, \varphi) = N(I) + P(I, \varphi)$在一个 $n$ 维环面 $I = I_0$ 的复邻域上解析:

$$\Sigma_{s,\tau}: \quad |\mathrm{Im}\varphi| \leqslant \tau, \qquad |I - I_0| \leqslant s,$$

这里$|x| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$, 并且满足下列条件:

(i) 凸性: 主部 $N(I)$是一个凸函数, 即它的 Hessian 矩阵 $\left(\dfrac{\partial^2 N}{\partial I_i \partial I_j}\right)$的特征值满足

$$\min\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n\} \geqslant \lambda > 0; \qquad \forall I \in \mathrm{Re}(\Sigma_{s,\tau})$$

(ii) 共振性：存在整数向量 $K_n \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}$，使

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial I}(I_0),\ K_n \right\rangle = 0;$$

(iii) 相对 Diophantine 条件：在$(n-1)$维流形上，未受扰动的哈密顿流的频率满足 Diophantine 条件：

$$|\langle \Omega,\ k\rangle| \geqslant D|k|_1^{-\mu}, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^{n-1} \backslash \{0\}$$

其中 $D>0$, $\mu>n$, $|k|_1 = \sum_{j=1}^{n-1} |k_j|$.

那么，存在正常数 $d = d(K_n, N, n, D, \mu, s, \tau) > 0$，使得只要在 $\Sigma_{s,\tau}$ 中 $|P| \leqslant d$，相应的哈密顿流一定有一个$(n-1)$维不变流形，具有形式

$$I = I_0 + \Gamma(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1}),$$
$$\varphi = \mathscr{H}_{t_0}(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1}) + \Theta(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1}).$$

$\Gamma$ 和 $\Theta$ 是 $|\mathrm{Im}\theta| \leqslant \frac{\tau}{2}$ 上的 $2\pi$ 周期解析函数. 在此不变流形上，相应的哈密顿流仍是拟周期

$$\theta = \theta_0 + \Omega t.$$

对于任意 $\varepsilon > 0$，存在正数 $d' = d'(\varepsilon, I_n, N, n, D, \mu, s, \tau) \leqslant d$ 只要在 $\Sigma_{s,\tau}$ 中 $|P| \leqslant d'$，

$$|\Gamma| + |\Theta| < \varepsilon.$$

这个定理的证明基本上仍要利用 KAM 技巧，但仅此还不够，它有着一些特殊的困难，在某些情况下我们不能预先明显地确定一系列逐层相套的复区域(像证明经典 KAM 理论一样). 逐次收缩这样的区域到 $\left\{|\mathrm{Im}\varphi| \leqslant \frac{\tau}{2},\ I = I_0\right\}$，我们必须根据逐次迭代后的哈密顿函数主部的特殊性质来隐式确定相应的复区域是多大.

下面我们给出证明的大概框架，详细证明见[11]. 利用上面定义的幺模矩阵，可以定义如下的辛线性变换

$$x = \varphi K, \qquad I = yK^T.$$

将$(x, y)$代入到哈密顿函数中，$H$ 在如下区域内当然是解析的

$$\Sigma_{s_*,\tau_*}:\ |\mathrm{Im}x|\leqslant\tau_*,\ |y-y_0|\leqslant s_*.$$

其中 $y_0=K^TI_0$, $\tau_*\leqslant\tau$, $s_*\leqslant s$, $(\tau_*, s_*)$依赖于$(K_n, \tau, s)$. 在变量$(x, y)$之下，

$$\frac{\partial N}{\partial y}(y_0)=(\Omega, 0),$$

$N$ 仍然是关于 $y$ 的凸函数.

像以往一样，我们仍然引进辛变换 $M: (x_+, y_+)\to(x, y)$:

$$y=y_++W_x,\qquad x_+=x+W_{y+}.$$

$W(x, y_+)$是母函数. 作为第一次迭代，$W$ 可以通过求解下列同调方程得到:

$$\langle(\Omega, 0), W_x\rangle=-P(x, y_+)+N_+(x_n, y_+).$$

求解过程和证明经典 KAM 理论一样，所不同者在于$(\Omega, 0)$中有一个零分量. 为了使正述方程有解，$N_+$ 必须与 $x_n$ 有关:

$$N_+(x_n, y_+)=(2\pi)^{n-1}\int_0^{2\pi}P(x, y_+)dx_1dx_2\cdots dx_{n-1},$$

以便去除引进共振的部分. 略去其它与经典KAM 理论相同的论证，我们得到一个新的哈密顿系统

$$H(x_+, y_+)=(N+N_+)(x_{n+}, y_+)+P_+(x_+, y_+).$$

新的主部不仅与作用量有关，而且与第 $n$ 个角变量有关. 可以看出，即使哈密顿流只由主部 $N+N_+$ 决定，在一般情况下原来的 $n$ 维不变环面 $y=y_0$ 也不复存在. 然而，由 $N+N_+$ 决定的哈密顿流却有$(n-1)$维不变环面.

**引理** 设 $N(y)$在区域 $D\ni y_0$ 上非奇异，即其 Hessian 矩阵的特征值的绝对值下有界，$|\lambda_i(y)|\geqslant\lambda>0$,

$$\frac{\partial N}{\partial y}(y_0)=(\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_k, 0, \cdots, 0),\ N_+(x_{k+1}, \cdots, x_n, y)$$

定义在 $\mathbb{T}^{n-k}\times D$ 上并满足小性条件 $|N_{+y}|<\lambda n^{-1}\mathrm{dist}\{y_0, \partial D\}$, $N_{+y}$ 的 Hessian 矩阵的谱半径小于 $\lambda$. 那么，由 $N+N_+$ 决定的哈密顿流至少具有$(n-k+1)$个不变环面 $\mathbb{T}^k$

$$x_j = \Omega_j t + x_{jl}, \qquad (1 \leqslant j \leqslant k)$$
$$x_j = x_{jl}, \qquad (k < j \leqslant n)$$
$$y = y_l.$$

其中 $1 \leqslant l \leqslant (n-k+1)$, $|y_l < y_0| \leqslant \frac{n}{\lambda} \sup_D |N_{+y}|$.

**证明** 函数 $F = N(y) + N_+(x_{k+1}, \cdots x_n, y) - \langle(\Omega, 0), y\rangle$ 在流 $x(t) = x_0 + (\Omega, 0)t$, $y(t) = y_0$ 之下是不变的. 如果我们找到 $F$ 关于 $(x_{k+1}, \cdots, x_n)$ 和 $y$ 的临界点, 这些临界点也是关于流不变的, 那么

$$\frac{\partial}{\partial y}(N + N_+) = \Omega, \quad \frac{\partial}{\partial x}(N + N_+) = 0,$$

这表明从这些点出发, 如上定义的流将保持 $y$ 和 $(x_{k+1}, \cdots, x_n)$ 固定, $x_j = \Omega_j t + x_j(0)$ (其中 $j \leqslant k$). 因此我们只需要寻找 $F$ 的临界点.

对于任意固定的 $(x_{k+1}, \cdots, x_n) \in \mathbb{T}^{n-k}$, 考虑映射 $N_y + \varepsilon N_{+y}$: $B_r(y_0) \to \mathbb{R}^n$ (其中 $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$), $B_r(y_0)$ 是一个半径 $r > \frac{n}{\lambda} \sup_D |N_{+y}|$, 中心位于 $y_0$ 的球. 根据假设, 这个球位于 D 的内部. 当 $\varepsilon = 0$ 时, 映射的度

$$\deg(N_y + \varepsilon N_{+y}, B_r(y_0), (\Omega, 0)) = 1;$$

而当 $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned} &\operatorname{dist}\{(N_y + \varepsilon N_{+y})(\partial B_r), (\Omega, 0)\} \\ &\geqslant |N_y(\partial B_r) - N_y(y_0)| - \varepsilon n \sup_D |N_{+y}| > 0. \end{aligned}$$

这说明方程

$$\frac{\partial}{\partial y}(N + N_+)(x_{k+1}, \cdots x_n, y) = \Omega$$

对于任意 $(x_{k+1}, \cdots, x_n) \in \mathbb{T}^{n-k}$ 都有解. 根据条件, $(N + N_+)_{yy}$ 是非奇异的. 由隐函数定理, 我们得到一个连续可微函数

$$y = y(x_{k+1}, \cdots, x_n).$$

函数 $F(x_{k+1}, \cdots, x_n, y(x_{k+1}, \cdots, x_n))$ 是定义在 $\mathbb{T}^{n-k}$ 上的可微函数, 根据 Lusternik-Schnirelman 理论, 它至少有 $(n-k+1)$ 个临界

点.

在下面定理1的证明中,我们对 $F$ 达到最大值的临界点最感兴趣. 这样的临界点在一般情况下对应于双曲型的低维环面,因为 $N$ 具有凸性. 这种低维环面的存在性暗示KAM迭代法也许在这些低维环面附近依然有效.

为了继续进行迭代变换,我们必须根据临界点是否具有"强坚固性",来决定取何种形式的迭代方式. 所谓"强坚固性",是指此函数受扰之后的临界点与未受扰函数的临界点足够接近. 由于 $N$ 被要求具有非奇异性, $P$ 可以充分小,因此 $N+N_+$ 的临界点在 $y$ 方向上充分接近 $N$ 的临界点. 但是,我们不能指望在 $x_n$ 方向上也充分接近,因为任何条件加在 $N_+$ 上都是不合适的.

(一)临界点只具有弱坚固性

所谓强弱之分,没有绝对的界限. 这是一个相对的概念. 在证明中,我们以是否满足下面的关系来界定强或弱:

$$\left|\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x_n^2}-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 N}{\partial y_i\partial x_n}\frac{\partial^2 N}{\partial z_j\partial x_{n\alpha}}\right)_{x_n=x_n^*,\,y=y^*}\right|\leqslant d^{\frac{2}{13}}. \tag{11.4}$$

满足上式者称为弱 不满足者归为强类. (11.4)式中 $(a_{ij})$ 是 $N(y, x_n)$ 关于 $y$ 的 Hessian 阵的逆 $(y^*, x_n^*)$ 是 $N(y, x_n)-\langle\Omega, \hat{y}\rangle$(其中 $\hat{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1})$ 的临界点、 因为 $N$ 关于 $y$ 的 Hessian 阵具有非奇异性,所以对每个固定的 $x_n\in L\subset\mathbb{T}$, 都有一个关于 $y$ 的临界点. 因此 当 $x_n$ 取遍 $L$ 时,这实际上定义了一条曲线 $\{y=\rho(x_n), x\in L\}$ 显然, $\rho$ 是实解析的. 用 $x_n^*$ 表示函数 $N(\rho(x_n), x_n)-\langle\Omega, \hat{\rho}(x_n)\rangle$ 的临界点,条件(11 4)实际上就是

$$\left|\frac{d^2}{dx_n^2}(N(\rho(x_n)\ \ x_n)-\langle\Omega,\ \hat{\rho}(x_n)\rangle)_{x_n=x_n^*}\right|\leqslant d^{\frac{2}{13}}.$$

$d$ 是正的常数,使得 $|P|\leqslant d$.

在弱坚固性情况下, $(N+N_+(y, x_n)-\langle\Omega, \hat{y}\rangle$ 的临界点也许会偏离 $N(y, x_n)-\langle\Omega, \hat{y}\rangle$ 相应的临界点很远,因而哈密顿函数不

能展开为关于$(y_n, x_n)$的泰勒级数，因为我们不知道关于$x_n$的区域究竟多大才合适，以便$(N+N_+)-\langle\Omega, \hat{y}\rangle$的临界点仍旧在其中。然而，对于固定的$x_n$，$N(y, x_n)-\langle\Omega, \hat{y}\rangle$关于$y$的临界点足够接近$(N+N_+)(y, x_n)-\langle\Omega, \hat{y}\rangle$关于$y$的临界点，用$\rho_+(x_n)$表示。因此，我们只需要在曲线$\{(\rho(x_n), x_n), x_n\in L\}$的一邻域内研究这个系统. $L$的选择是非常微妙的. 一方面，它要足够大，使得下一次迭代变换中相应的临界点仍在此区域中；另一方面，它又不能过分大，因为在区域$\{|\mathrm{Im}x_n|\leqslant d^{\frac{2}{13}}, \mathrm{Re}\,x_n\in L\}$中我们需要估计$\left|\frac{d}{dx}(N(\rho(x_n), x_n)-\langle\Omega, \hat{\rho}(x_n)\rangle)\right|\leqslant 0(d^{\frac{4}{13}})$.

在临界点具有弱坚固性的情况下，将扰动项展开成为$y_n-\rho_n(x_n)$的级数，并截断到5次项，

$$TP=\sum_{j=0}^{5}P_j(\hat{y}, x)(y_n-\rho_n(x_n))^j,$$

其余项$RP=P-TP$在$y_n-\rho_n(x_n)$的一个较小区域内比$P$小得多. 除此之外，我们还将$TP$展开成$\hat{x}$的傅里叶级数，并截断到$K$项，

$$K=\left[\frac{1}{n-1}\left(\frac{D}{2d^{\frac{2}{13}}}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right]+1$$

$$\mathcal{T}_kP_j=\sum_{\substack{k\in \mathbb{Z}^{n-1}\setminus\{0\}\\|k|<K}}P_{jk}e^{i\langle k,\hat{x}\rangle}.$$

剩余部分$\mathscr{R}_k(TP)=TP-\mathscr{T}_kTP$也是比$TP$小得多的项. 与之相对应，母函数也展开成

$$W(x, y)=\sum_{j=0}^{5}W_j(\hat{y}, x)(y_n-\rho_n(x_n))^j.$$

$W_j$由下列方程决定

$$\langle\omega, W_{j\hat{x}}\rangle-j\frac{\partial^2N}{\partial y_n\partial x_n}(\rho(x_n), x_n)W_j=-\mathcal{T}_kP_j(\hat{y}, x). \tag{11.5}$$

将$x_n$的定义域限制到较小的区域内，例如$|\mathrm{Im}\,\hat{x}_n|\leqslant d^{\frac{2}{13}}$,

$\mathrm{Im}(N_{y_n x_n}(\rho(x_n), x_n))$足够小，

$$|\langle\omega, k\rangle - j\,\mathrm{Im}(N_{y_n x_n}(\rho(x_n), x_n))| \geqslant \frac{1}{2}|\langle\omega, k\rangle|.$$

$$\forall j \leqslant 5, \ |k| \leqslant K \qquad (11.6)$$

这样，我们就定义了一个母函数 $W$，由此决定一个辛变换. 在此变换下，

$$H(x, y) = (N+N_+)(y_+, x_{n+}) + P_+(x_+, y_+). \qquad (11.7)$$

其中

$$N_+ = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int_0^{2\pi} P(x, y)\,d\hat{x},$$

$$P_+ = (M_1+M_2+M_3+M_4)(x_+, y_+),$$

$$M_1 = N(y_+ + W_x, x_n) - N(y_+, x_n + W_{y_n}) - \langle\omega, W_{\hat{x}}\rangle$$

$$+ \frac{\partial^2 N}{\partial x_n \partial y_n}(\rho(x_n), x_n)(y_n - \rho_n(x_n))W_{y_{n+}},$$

$$M_2 = (P-N_+)(x, y) - (P-N_+)(x, y_+),$$

$$M_3 = \mathscr{R}(P-N_+)(x, y_+) + \mathscr{R}(T(P-N_+))(x, y_+),$$

$$M_4 = N_+(x, y) - N_+(x_+, y_+).$$

容易看出，$M_2$、$M_3$ 和 $M_4$ 都是 $d$ 的高阶小量，$M_1$ 则需要以更明确的方式表示. 若记

$$N(x_n, y) = \phi(x_n) + \langle\Omega, \hat{y}\rangle + \widetilde{N}(x_n, y), \qquad (11.8)$$

其中

$$\phi(x_n) = N(x_n, \rho(x_n)) - \langle\Omega, \hat{\rho}(x_n)\rangle$$

$$= \min_y \{N(x_n, y) - \langle\Omega, \hat{y}\rangle\},$$

则有

$$\widetilde{N}_{y_i x_n}(x_n, y) = N_{y_i x_n}(x_n, y),$$

$$\widetilde{N}_{y_i y_j}(x_n, y) = N_{y_i y_j}(x_n, y),$$

$$\widetilde{N}(x_n, \rho(x_n)) = \widetilde{N}_y(x_n, \rho(x_n)) = \widetilde{N}_{x_n}(x_n, \rho(x_n)) = 0$$

因为在直线 $\{\rho(x_n), x_n \in L\}$ 上以上各项恒为 0，考虑到它们是解析函数，故对 $x_n$ 在解析区域总有以上成立. 借助以上的表示，

$$M_1 = M_{11} + M_{12} + M_{13},$$

$$M_{11}=\phi(x_{n+}-W_{y_{n+}})-\phi(x_{n+})$$
$$=\phi'(x_{n+})W_{y_{n+}}+\frac{1}{2}\phi''(x_{n+}+\eta W_{y_{n+}})W^2_{y_{n+}},$$
$$M_{12}=\tilde{N}(y_++W_x,\ x_n)-\tilde{N}(y_+,\ x_n)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}N_{y_iy_j}(\rho(x_n)+\xi_1\Delta y_+,\ x_n)\Delta y_{i+}W_{x_j}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}N_{y_iy_j}(y_++\xi_2W_x,\ x_n)W_{x_i}W_{x_j},$$
$$M_{13}=\tilde{N}(y_+,\ x_n)-\tilde{N}(y_+,\ x_{n+}W_{y_{n+}})$$
$$+N_{y_nx_n}(\rho(x_n),\ x_n)\Delta y_{n+}W_{y_{n+}}$$
$$=-\sum_{i=1}^{n-1}N_{y_ix_n}(\rho(x_n),\ x_n)\Delta y_{i+}W_{y_{n+}}$$
$$-\frac{1}{2}N_{x_n^2}(y_+,\ x_n+\eta W_{y_{n+}})W^2_{y_{n+}}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}N_{y_iy_jx_n}(\rho(x_n)+\xi_3\Delta y_+,\ x_n)\Delta y_{i+}\Delta y_{j+}W_{y_{n+}},$$
其中$\xi_jW_x=(\xi_{j1}W_{x1},\ \cdots,\ \xi_{jn}W_{xn})$，$\Delta y_+=y_+-\rho(x_n)$，$|\xi_{ij}|\leqslant 1$ $(i=1,\ 2,\ 3;\ j\leqslant n)$以及$|\eta|\leqslant 1$. 如果选择
$$|\operatorname{Im}x_n|\leqslant O(d^{\frac{2}{13}}),\quad |y_n-\rho_n(x_n)|\leqslant O(d^{\frac{2}{13}}),$$
$$|y_j-\rho_j(x_n)|\leqslant O(d^{\frac{4}{13}})\quad (j<n)$$
以及小心选择$x_n$的定义域，可使$M_1$也是$d$的高阶小量，从而使$|P_+|$及其梯度都充分小于原来相应的量.

要阐明$x_n$定义域的选择是一件费口舌的事. 设$N(y,\ x_n)+P(x,\ y)$在如下区域上解析：
$$\mathscr{A}_t=\{|\operatorname{Im}x_i|\leqslant t,\ \operatorname{Re}x_i\in\mathbb{T},\ (i\leqslant n-1)\},$$
$$\Sigma_s=\{|y_i-\rho(x_n)|\leqslant s^4,\quad (i\leqslant n-1)$$
$$|y_n-\rho_n(x_n)|\leqslant s^3,\ |\operatorname{Im}x_n|\leqslant s^2,\ \operatorname{Re}x_n\in L\}.$$
$L$是一可收缩于一点的闭区间，或是整个环面$T$. 如果$L\subset T$是可缩的区间，那么$L\supseteq[x_n^*-s^2,\ x_n^*+s^2]$. 在一轮迭代中，$t$、$s$与$d$的关系可以不十分紧密，只要满足一些关系．但在收敛性证明中，

对于第 $i$ 次迭代，取 $s_i=d_i^{\frac{1}{13}}$，$t_i=\frac{\tau_0}{2}(1+2^{-m})$，$d_{i+1}=d_i^{\frac{14}{13}}$.

选取 $s_+$、$t_+$ 为正数，使得下列关系成立：

$$
\begin{aligned}
&2s_+\leqslant s, \quad s\leqslant t\leqslant 1, \quad s_+^4\geqslant s^5, \\
&s_+\leqslant t_+, \quad s_+\leqslant \frac{1}{4}(t-t_+), \\
&s^2|\log s|^\mu\leqslant \frac{D}{2}\left(\frac{3(t-t_+)}{64(n-1)}\right)^\mu, \\
&s^2\leqslant\left(\frac{e}{2n-2}\right)^{n-1}\left(\frac{t-t_+}{32}\right)^n,
\end{aligned}
\tag{11.9}
$$

并假定在 $\Sigma_s\times\mathscr{A}_t$ 上，

(i) 扰动项 $P$ 满足小性条件：

$$
|P(x, y)|\leqslant\delta, \tag{11.10}
$$

$$
\delta\leqslant\min\left\{\min\left\{\frac{D(t-t_+)^\mu}{4c_1 8^{\mu+2}}, \ \frac{D^6(t-t_+)^{6\mu}}{8c_5}\right\}\times(s^4-3s_+^4)(s^3-3s_+^3), \ \frac{\lambda}{12n}s_+^2 s^{10}\right\};
$$

(ii) $N$ 的正定性. $N$ 的 Hessian 矩阵在 $\mathrm{Re}\Sigma_s$ 上正定：

$$
\min_{\Sigma_s}\left\|\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}\xi\right\|\geqslant\lambda\|\xi\|, \qquad \lambda>0, \ \forall\xi\in\mathbb{C}^n;
$$

(iii) 临界点 $(x_n^*, y^*)$ 由通过寻找函数 $\phi(x_n)=N(\rho(x_n), x_n)-\langle\Omega, \hat{\rho}(x_n)\rangle(x_n\in L)$ 的最大值得到. 在整个曲线 $\{(\rho(x_n), x_n), x_n\in L\}$ 上

$$
|\phi''(x_n)|\leqslant 2s^2. \tag{11.11}
$$

如果 $L$ 是一可缩区间，表示为 $[l, r]$，那么 $l\leqslant x_n^*-s^2$，$r\geqslant x_n^*+s^2$，在每一端点 $x_n=l$ 和 $x_n=r$，如下关系式成立

$$
|\phi'(x_n)|\geqslant 2s^4, \tag{11.12}
$$

$\rho(x_n)$ 在 $\{|\mathrm{Im}\, x_n|\leqslant s^2, \mathrm{Re}\, x_n\in L\}$ 上实解析；

(iv) 在 $\Sigma_s$ 上如下关系式成立：

$$
\max_{l<3}\left|\frac{\partial^l N}{\partial y^l}\right|\leqslant\beta, \quad \max_{\substack{|(l_1,l_2)|<3\\ l_2\geqslant 1}}\left|\frac{\partial^{l_1+l_2}N}{\partial y^{l_1}\partial x_n^{l_2}}\right|\leqslant\frac{1}{7n^2 2^\mu},
$$

$$\max_{l<3}|\phi^{(l)}(x_n)| \leqslant \frac{1}{64}, \quad \max_{l=1,2}|\rho^{(l)}(x_n)| \leqslant \frac{1}{2}. \qquad (11.13)$$

由上面的讨论可知，(i)的小性条件是可以满足的；(ii)的凸性也没有问题，因为在若干次迭代以后，哈密顿函数的主部中最主要的部分仍然是最初的可积部分，各次平均而添加上的部分是小量，并不能破坏整个主部的凸性；(iii)在第一次迭代时成立，因为此时 $\rho(x_n)=y_0$，$L=T^1$，在每次迭代后通过重新选择 $L$，可使(iii)逐次成立；(iv)也成立，因为只要扰动充分小，第二、三、四个不等式自然成立。

临界点只具有弱坚固性，意味着下式成立：

$$|\phi''(x_n)|_{x_n=x_n^*} \leqslant s_+^2. \qquad (11.14)$$

引进几个逐层嵌套的区域：

$$\mathscr{A}_{t+} \subset \mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_2 \subset \mathscr{A}_t,$$

$$\Sigma_{s+} \subset \Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \Sigma_s.$$

其中

$$\mathscr{A}_{t+} = \{|\mathrm{Im}\, x_i| \leqslant t_+,\ \mathrm{Re}\, x_i \in \mathbb{T},\ i<n\},$$

$$\mathscr{A}_1 = \{|\mathrm{Im}\, x_i| \leqslant t_+ + s_+^2,\ \mathrm{Re}\, x_i \in \mathbb{T},\ i<n\},$$

$$\mathscr{A}_2 = \left\{|\mathrm{Im}\, x_i| \leqslant t - \frac{1}{2}(t-t_+),\ \mathrm{Re}\, x_i \in \mathbb{T},\ i<n\right\},$$

$$\Sigma_{s+} = \{|y_i - \rho_{+i}(x_n)| \leqslant s_+^4,\ i>n,\ |y_n - \rho_{+n}(x_n)| \leqslant s_+^3,$$
$$|\mathrm{Im}\, x_n| \leqslant s_+^2,\ \mathrm{Re}\, x_n \in L_+\},$$

$$\Sigma_0 = \{|y_i - \rho_i(x_n)| \leqslant 2s_+^4,\ i<n,\ |y_n - \rho_n(x_n)| \leqslant 2s_+^3,$$
$$|\mathrm{Im}\, x_n| \leqslant s_+^2,\ \mathrm{Re}\, x_n \in L_+\},$$

$$\Sigma_1 = \{|y_i - \rho_i(x_n)| \leqslant 3s_+^4,\ i<n,\ |y_n - \rho_n(x_n)| \leqslant 3s_+^3,$$
$$|\mathrm{Im}\, x_n| \leqslant 2s_+^2,\ \mathrm{Re}\, x_n \in L_1\},$$

$$\Sigma_2 = \left\{|y_i - \rho_i(x_n)| \leqslant s^4 - \frac{1}{2}(s^4 - 3s_+^4),\ i<n,\right.$$
$$|y_n - \rho_n(x_n)| \leqslant s^3 - \frac{1}{2}(s^3 - 3s_+^3),$$
$$\left.\mathrm{Im}\, x_n| \leqslant s^2 - \frac{1}{2}(s^2 - 2s_+^2),\ \mathrm{Re}\, x_n \in L_2\right\}.$$

其中$\{(\rho_+(x_n), x_n), x_n\in L_+\}$是$N+N_+-\langle\Omega, \hat{y}\rangle$关于$y$的临界点构成的曲线；$L_+$是$T^1$，或者是一闭区间$[l_+, r_+]$，使得(iii)关于$N+N_+$成立．当$L=[l, r]\neq T^1$时，

$$L_2=\left[l+\frac{1}{2}(l_1-l),\ r-\frac{1}{2}(r-r_1)\right],$$

其中$L_1=[l_1, r_1]$是隐式决定的．在这种情况下，

$$[l_+, r_+]=[l_1+s_+^2,\ r-s_+^2].$$

$L_1$以如下方式决定．选择$x_n^*-l_1$, $r_1-x_n^*$尽可能大，使得

$$|\phi'(x_n)|<4s_+^4 \tag{11 15}$$

在$(l_1, r_1)$内成立，而在两端点它成为等式．由于(11.14)式成立，因此$L_1\supseteq[x_n^*-3s_+, x_n^*+3s_+]$．当$L\neq\mathbb{T}$时，

$$\operatorname{dist}(L,\ \partial L)\geqslant\frac{1}{2}s^2. \tag{11.16}$$

如果$L=\mathbb{T}$, (11.14)也许在整个$\mathbb{T}$上成立．在此情况下，$L_1=\mathbb{T}$.

为了得到$|\phi'(x_n)|$在$\{x_n: |\operatorname{Im}x_n|\leqslant 2s_+^2, \operatorname{Re}x_n\in L_1\}$的上界，下面的引理是有用的．

**引理** 设$f(x)\in c^2[a, b]$满足$|f(x)|<A$, $|f''(x)|<B$, 在某点$x_0\in[a, b]$处，$|f'(x_0)|\leqslant\xi$，那么对$x\in[a, b]$,

$$|f'(x)|\leqslant 2\sqrt{AB}+\xi.$$

证明留给读者．

应用此引理到$\phi(x_n)$，我们得到对$x_n\in L_1$,

$$|\phi''(x_n)|\leqslant 2\sqrt{\sup\{\phi^{(3)}(x_n)\phi'(x_n)\}}+|\phi''(x_n^*)|$$

$$\leqslant\frac{3}{2}s_+^2. \tag{11.17}$$

从而对于$x_n\in\{|\operatorname{Im}x_n|\leqslant 2s_+^2, \operatorname{Re}x_n\in L_1\}$,

$$|\phi'(x_n)|\leqslant 8s_+. \tag{11.18}$$

(11 18)对于估计$|P_+|$的上界是极端重要的．

与证明经典KAM理论的这一段过程相似，通过求解(11.5)式得到的母函数$W$而确定的辛变换$(x_+, y_+)\to(x, y)$将$\Sigma_2\times\mathscr{A}_2\subset\Sigma_s\times\mathscr{A}_t$映入到$\Sigma_1\times\mathscr{A}_1$，在$\Sigma_1\times\mathscr{A}_1$上新的扰动项

$$|P_+| \leqslant c_2\left\{\theta s_+^3(s^2-2s_+^2)^{-1}+\delta\left(\frac{s_+}{s}\right)^{15}\right\}:=\delta_+, \quad (11.19)$$

$$\theta=\frac{c_1\delta}{D(t-t_+)^{\mu}},$$

其中由(11.17)得到对 $M_{11}$ 的估计

$$M_{11}| \leqslant |\phi'(x_n)||W_{y_{n+}}|+\max|\phi''||W_{y_{n+}}|^2$$
$$\leqslant 16\theta s_+^4(s^3-3s_+^3)^{-1}+4\theta^2(s^3-3s_+^3)^{-2}.$$

由关于 $y_n-\rho_n(x_n)$ 到 5 次项的泰勒展开式截断以及关于 $\hat{x}$ 到 $K$ 次项的傅里叶展开式截断，注意到(11.10)，我们得到 $M_3$ 的估计

$$|M_3| \leqslant c_3\left(\delta\left(\frac{s_+}{s}\right)^{15}+\theta s^2\right).$$

由于(11.5)式，关于 $y_n-\rho_n(x_n)$ 的泰勒展开式并有限次截断是必要的．为了使(11.5)有解，要处理好小分母问题．为此，必须将关于 $\hat{x}$ 的傅里叶展开式有限次截断，以便(11.6)式成立．所幸这样的截断并不影响 $|P_+|$ 的高阶小量之估计．

将 $(x_+, y_+)$ 的定义域收缩到 $\Sigma_0\times\mathscr{A}_{t_+}$，应用柯西方法，不难得到 $|P_+|$ 的一阶导数上界的估计．

从以上的论述可以看出，$L_1$ 的选取已经使得(11.18)从而使得(11.19)成立．注意到 $s_i$、$t_i$ 与 $d_i$ 的关系，$\delta_+$ 是 $\delta$ 的高阶小量．注意到 $N-\langle\Omega, \hat{y}\rangle$ 的临界点在 $\mathrm{Re}\Sigma_s$ 中这一性质对 $|P_+|$ 的估计所起的作用．为了使下一步迭代能够继续进行下去，$N+N_+-\langle\Omega, \hat{y}\rangle$ 相应的临界点必须位于 $\Sigma_{s_+}\subset\Sigma_0$ 之内．这一点由 $L_1$ 的选择方式可以保证，读者可以自行验证．

（二）临界点具有强坚固性

在若干步迭代后，也许临界点会具有强坚固性．根据定义，如下关系成立

$$\left|\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x_n^2}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 N}{\partial y_i\partial x_n}\frac{\partial^2 N}{\partial y_j\partial x_n}\right)_{x_n=x_n^*,\ y=y^*}\right| \geqslant s_+^2$$

此条件可以保证 $N+N_+-\langle\Omega, \hat{y}\rangle$ 的临界点与 $N-\langle\Omega, \hat{y}\rangle$ 相应的临界点充分接近．可以证明，一旦这种临界点具有强坚固性，在后

续的迭代中相应的临界点永远具有强坚固性．在此情况下，可将定义域$\mathscr{A}_s\times\Sigma_s$收缩至$\mathscr{A}_s\times\mathscr{D}_s$，其中

$$\mathscr{D}_s=\{|\hat{y}-\hat{\rho}(x_n)|\leqslant s^4,\ |y_n-y_n^*|\leqslant s^3,\ |x_n-x_n^*|\leqslant s^8\}.$$

事实上，$\mathscr{D}_s\not\subset\Sigma_s$，但是如果注意到$\Sigma_{s+}$是由$\Sigma_0$收缩而得到的，$\Sigma_{s+}$是以临界点为中心，相应的小性条件在$\Sigma_0$上成立，而$D_{s+}\subset\Sigma_0$，因此这样的收缩是合理的．

展开扰动项$P$为关于$y_n-y_n^*$，$x_n-x_n^*$的泰勒级数，并用至5次项的截断$TP$来近似扰动项$P$，

$$TP=\sum_{|i+j|<5}P_{ij}(\hat{x},\ \hat{y})(x_n-x_n^*)^i(y_n-y_n^*)^j.$$

引进母函数$W$，形式为

$$W(x,\ y_+)=\sum_{|i+j|<5}W_{ij}(\hat{x},\ \hat{y}_+)(x_n-x_n^*)^i(y_{n+}-y_n^*)^j.$$

决定$W$的同调方程为：

$$\partial\boldsymbol{W}_l+\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{W}=-\widetilde{\boldsymbol{P}}_l.\qquad(0\leqslant l\leqslant 5)\qquad(11.20)$$

其中$\boldsymbol{W}_l=(W_{l0},\ W_{(l-1)1},\ \cdots,\ W_{0l})^t$，$\widetilde{\boldsymbol{P}}_l=(\widetilde{P}_{l0},\ \widetilde{P}_{(l-1)1},\ \cdots,\ \widetilde{P}_{0l})^t$，$\partial W_{ij}=\langle\Omega,\ W_{ij\hat{x}}\rangle$，$\widetilde{P}_{ij}=P_{ij}-[P_{ij}]$，

$$[P_{ij}]=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int_0^{2\pi}P_{ij}(\hat{x},\ \hat{y})d\hat{x},$$

$$\boldsymbol{A}_0=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}-N_{y_nx_n} & N_{y_n^2}\\ -(\phi''-N_{y_nx_n}\rho_n') & -N_{y_n^2}\rho_n'\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$$

其中各阶矩阵通过$\boldsymbol{A}_1$的元素来定义

$$\boldsymbol{A}_l=(a_{ij})_{(l+1)\times(l+1)},\qquad 2\leqslant l\leqslant 5$$

$$a_{jj}=(l+1-j)b_{11}+(j-1)b_{22},$$

$$a_{j(j+1)}=(l+1-j)b_{12},$$

$$a_{(j+1)j}=(l+1-j)b_{21},$$

$$a_{ij}=0,\qquad(|i-j|\geqslant 2)$$

所有元素都在临界点处赋值．(11.20)可以通过傅里叶展开来求

解，置

$$W_{ij}=\Sigma W_{ijk}(\hat{y})e^{i\langle k,\hat{x}\rangle},$$

$$\widetilde{P}_{ij}=\Sigma P_{ijk}(\hat{y})e^{i\langle k,\hat{x}\rangle}, \qquad (i+j)\leqslant 5$$

于是

$$(i\langle k,\ \Omega\rangle\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}_j)\boldsymbol{W}_{jk}=-\widetilde{\boldsymbol{P}}_{jk},$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位阵. 可以验证, $\boldsymbol{A}_j$ 的谱为

$$s_P(\boldsymbol{A}_j)=\{(j-1)\sigma_1+l\sigma_2,\ l=0,\ 1,\ \cdots j\}.$$

$$\sigma_{1,2}=\frac{1}{2}\{-(N_{x_n v_n}+N_{v_n^2}\rho_n')\pm\sqrt{(N_{x_n v_n}+N_{v_n^2}\rho_n')^2-4\phi''N_{v_n^2}}\}.$$

因此

$$\boldsymbol{W}_{0k}=\frac{i\widetilde{\boldsymbol{P}}_{0k}}{\langle k,\ \Omega\rangle},$$

$$\boldsymbol{W}_{jk}=-\frac{(i\langle k,\ \Omega\rangle\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}_j)^*\widetilde{\boldsymbol{P}}_{jk}}{\prod_{\lambda_l\in s_P(\boldsymbol{A}_j)}(i\langle k,\ \Omega\rangle+\lambda_l)}. \qquad (11.20)$$

其中 $\boldsymbol{A}_j^*$ 是 $\boldsymbol{A}_j$ 的伴随阵. 因为此临界点是通过寻找极大值来达到的, 所以 $\phi''<0$. 再由于哈密顿函数主部具有凸性, $N_{v_n^2}>0$, 这两者保证了所有 $\lambda_l\in s_P(\boldsymbol{A}_j)$ 都是实数, 因而 $\Omega$ 的 Diophantine 条件便可以解决小分母问题. 余下的证明是和证明双曲型低维不变环面相似的. 不同之处在于 $\mathscr{D}_s$ 的形状不像 § 8 中有关区域规则, 因而各次迭代中余项之估计略有不同, 但没有本质性困难.

总的来说, 若应用牛顿迭代法来证明本定理, 一开始相应的临界点总是只具有弱坚固性, 在后续的迭代过程中有可能相应的临界点总是只具有弱坚固性, 这样迭代一直可以在第一种状态下进行; 也有可能会转移到具有强坚固性这种情况. 由于这种转移是不可逆的, 因而这种迭代方法也能奏效, 相应的收敛性证明就不在此处详述了.

读者可以发现, 如果取临界点为相应于 $\phi(x_n)$ 的极小点, 在一般情况下此点自然不同于极大点. 直观地看, 此点相应于椭圆型低维环面. 若要证明相应的低维环面存在性, 当这种临界点具有弱坚固性时, 其迭代过程与上面所述没有任何区别. 困难在于当临界点具有强坚固性时, $\boldsymbol{A}_j$ 的谱是纯虚数, 这就有可能使得

$$|i\langle k,\ \Omega\rangle+\lambda_l|<|\langle k,\ \Omega\rangle|,$$

从而使得小分母问题变得无法控制．到目前为止，著者尚不知这一困难怎样克服．同样的问题出现在当共振关系不止一个时．在这种情况下，也许相应的低维环面不存在(指定某一 $\Omega$)，但是依著者直观而言，在整个共振层 $M_k$ 内，依相对的勒贝格测度，应有充分多的 $\Omega$，相应的大环面破裂后至少有$(k+1)$个$(n-k)$维低维环面存在．

## §12　光滑性及无理性条件对不变环面存在性的影响

首先研究光滑性对不变环面存在性的影响．在§7～§11的论述中，我们总是假定哈密顿系统是实解析的．阿诺尔德在最初证明任意有限个自由度哈密顿系统的KAM理论时就是这样假设的，而莫泽在证明二维扭转保面积映射时则没有这样的假设．他仅要求 $C^{333}$ 阶可微性！从以上几节的研究可以看出，实解析性在证明中的作用是重大的：由于解析性，关于函数导数上界的估计可以利用柯西方法由函数上界得到，而这一系列上界的估计直接关系到牛顿迭代的收敛性．

在莫泽的工作之后，M．Herman 和 H．Rüssman 等人做了十分细致的工作[21],[22],[49],[50]，将 $C^{333}$ 阶可微性大大降低．对二维扭转映射而言，$C^{3+\delta}(\delta>0)$ 是为保证不变曲线存在性所需的最低可微性要求[21]．对于任意 $n$ 个自由度的哈密顿系统，D．Salamon 和 E．Zehnder 证明对于具有柯尔莫哥洛夫非退化的系统，如果 $\omega\in\mathbb{R}^n$ 满足 Diophantine 条件，近可积哈密顿系统只要具有 $C^{4\mu+2+\delta}(\delta>0,\ \mu>n-1)$ 可微性，则相应于旋转向量 $\omega$ 的不变环面在小扰动之下依然存在．关于此结果的严格数学表述形式，读者可参见[52]．这一结果的证明基本思路和证明实解析哈密顿系统的KAM理论基本相同，所不同者在于为了得到每一步变换的估计，可微系统首先得由一个实解析系统近似表示，这两者之差是不可积项的高阶小量；而对于此实解析系统，证明实解析系统

相应结论的方法可以应用．这种逼近对每一步迭代都要进行．这种解析平滑技巧是由莫泽发明的，它根据一个事实，霍尔德尔(O. Hölder)空间的逼近性质可以由解析函数来刻画．稍为详细一点地说，也就是对于 $l=k+\mu$，$k$ 是正整数，$0<\mu<1$，$C^l(\mathbb{R}^n)$ 表示 $k$ 次连续可微函数 $f$，并且

$$|f|_{C^l}=|f|_{C^0}+|f|_{k,\mu}<\infty,$$

$$|f|_{k,\mu}=\sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^n\\|\alpha|=k\\|x-y|<1}}|\partial^\alpha f(x)-\partial^\alpha f(y)|/|x-y|^\mu.$$

**引理 1** 存在一族从 $C^0(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathbb{C}^n$ 上的整函数空间的卷积算子

$$\mathrm{S}rf=r^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}K(r^{-1}(x-y))f(y)dy. \qquad 0<r\leqslant 1$$

对于每一个 $l>0$，总存在常数 $c=c(l)>0$，使得如果 $f\in c^l(\mathbb{R}^n)$，对 $|\alpha|\leqslant l$，$|\mathrm{Im}\,x|\leqslant r$，

$$|\partial^\alpha \mathrm{S}r\,f(x)-\sum_{|\beta|\leqslant l-|\alpha|}\partial^{\alpha+\beta}f(\mathrm{Re}\,x)(i\,\mathrm{Im}\,x)^\beta/\beta!\,|$$

$$\leqslant c|f|_{C^l}r^{l-|\alpha|}.$$

特别地，对于 $\rho\leqslant r$，

$$|\partial^\alpha \mathrm{S}r\,f-\partial^\alpha S_\rho f|_\rho\leqslant c|f|_{C^l}r^{l-\alpha}.$$

此处 $|\cdot|_\rho$ 是解析函数在如下意义下的模

$$|f|_\rho=\sup\{|f(x)|;\quad x\in\mathbb{C}^n,\ |\mathrm{Im}\,x|\leqslant\rho\}.$$

在实情形下，还有下列估计

$$|\mathrm{S}r\,f-f|_{C^s}\leqslant c|f|_{C^l}r^{l-s}, \qquad s\leqslant l$$

$$|\mathrm{S}r\,f|_{C^s}\leqslant c|f|_{C^l}r^{l-s}, \qquad s\leqslant l_0$$

如果 $f$ 是一些变量的周期函数，逼近函数 $\mathrm{S}rf$ 也是这些变量的周期函数．

下面的引理是引理 1 的部分逆．

**引理 2** 设 $f$: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是一列定义在复域 $|\mathrm{Im}\,x|\leqslant\gamma_\nu=2^{-\nu}r_0$，$x\in\mathbb{C}^n$，$0<r_0\leqslant 1$ 上的实解析函数 $f_\nu(x)$ 的极限，并且有

$$|f_\nu(x)-f_{\nu-1}(x)|\leqslant Ar_\nu^l, \qquad (|\mathrm{Im}\,x|\leqslant r_\nu)$$

那么 $f\in c^s(\mathbb{R}^n)$，$s\leqslant l$ 不是整数，而且

$$|f-f_0|_{c^s}\leqslant cA(\theta(1-\theta))^{-1}r_0^{l-s},$$

其中 $0<\theta=s-[s]<1$，$c=c(l,n)>0$.

引理 1 和引理 2 的证明，可见[38]、[59].

以上的结果说明，为了保证 KAM 环面存在，对哈密顿系统的光滑性要求并不是很高. 然而，光滑性的要求是不是本质性的呢？即若没有相当的光滑性保证，KAM 环面就不存在？对于二维扭转映射，M. Herman 证明了对于给定的 $\omega$，满足 Diophantine 条件. 如果原可积系统 $C^\infty$ 光滑，在一般情况下，$C^{3-\delta}$ 扰动将破坏给定频率 $\omega$ 的不变曲线. 详细证明可见[21] 的第二章. 这说明 $C^{3+\delta}$ 可微性要求是最佳的了. 同时，这一现象也说明，莫泽当初关于 $C^{333}$ 可微性的工作是何等深刻.

现在我们考虑无理性条件对不变环面存在性的影响. 由 KAM 理论，若系统具有柯尔莫哥洛夫非退化性，指定某一频率 $\omega$，只要 $\omega$ 满足 Diophantine 条件，扰动充分小，相应的不变环面就能经受住扰动而继续存在，当然相应的光滑性要求是保证满足的. 然而，我们知道，并非所有的 $\omega$ 都满足 Diophantine 条件. 如果不满足这一条件，也不一定就有共振关系. 存在第三种可能性，即旋转向量为刘维尔向量. 一个很自然的问题是相应于这些旋转向量的环面在小扰动下是否一定存在？对于一般具有任意 $n$ 个自由度的哈密顿系统，目前尚无结论. 对于二维扭转保面积映射，马瑟提出一个判别不变圈存在性的充分必要条件[29]. 这一条件是根据变分原则而提出的.

考虑一个光滑的紧连通流形 $\mathscr{M}$. $H$ 是定义在此流形上的可微函数. 设此函数在 $\mathscr{M}$ 上的两个不同点 $x_0$ 和 $x_1$ 处取得最大值，这时我们可以用一条道路联接 $x_0$ 与 $x_1$. 所谓联接 $x_0$ 与 $x_1$ 的道路，实际上是一个连续映射 $\gamma$: $[0,1]\to\mathscr{M}$，使得 $\gamma(0)=x_0$，$\gamma(1)=x_1$. $H$ 联系到这两点的最大最小值是 $\sup\limits_{\gamma}\min\limits_{t}H(\gamma(t))$，其中

上界对取遍所有这样的道路类得到. 熟悉越山引理的读者知道用这样的方法可以去寻找相应于鞍点的 $H$ 的临界点.

现在考虑正合的二维保面积扭转映射. 它的提升可表示成 $\mathbb{R}\times[0,1]\circlearrowleft$, $(x, y)\to(x_1, y_1)=f(x, y)$, 满足关系式 $f(x+1, y)=f(x, y)+(1, 0)$. 这样的映射有母函数 $h(x, x_1)$, 使

$$\begin{cases} y=\dfrac{\partial h(x, x_1)}{\partial x}=h_1(x, x_1), \\ y_1=-\dfrac{\partial h(x, x_1)}{\partial x_1}=-h_2(x, x_1). \end{cases}$$

扭转性条件因而是 $\dfrac{\partial \pi_1 f}{\partial y}>0$, 其中 $\pi_1$ 是投影映射: $A=\mathbb{R}\times[0, 1]\to\mathbb{R}$. 假设 $f$ 是保边界的, 即 $f(x, 0)\in\mathbb{R}\times\{0\}$, $f(x, 1)\in\mathbb{R}\times\{1\}$. 记 $f_0=\pi_1 f(x, 0)$, $f_1=\pi_1 f(x, 1)$. 这两个圆周上的映射都有各自的旋转数 $\rho(f_0)$ 与 $\rho(f_1)$. 对于介于这两者之间的任一有理数 $\rho(f_0)<p/q<\rho(f_1)$, 我们取 $\mathscr{X}_{p,q}$ 为双向无穷序列 $x=\{\cdots, x_i, \cdots\}\in\mathbb{R}^\infty$ 的集合, 并对所有 $i\in\mathbb{Z}$, $x_{i+q}=x_i+p$, $f_0(x_i)\leqslant x_{i+1}\leqslant f_1(x_0)$. 对于 $x\in\mathscr{X}_{p,q}$, 定义 $h$ 在其上的作用量为

$$W(x)=\sum_{i=0}^{q-1}h(x_i, x_{i+1}).$$

我们也用 $\mathscr{X}$ 表示所有双向无穷序列 $x$ 的集合, $x$ 满足条件 $f_0(x_i)\leqslant x_{i+1}\leqslant f_1(x_i)$. 显然, $\mathscr{X}_{p,q}\subset\mathscr{X}$. 某一元素 $x\in\mathscr{X}$ 若满足关系式

$$h_2(x_{i-1}, x_i)+h_1(x_i, x_{i+1})=0, \qquad \forall i\in\mathbb{Z}$$

称此元素为 $\mathscr{X}$ 的平衡点. 显然, $\mathscr{X}$ 的平衡点是映射 $f$ 的轨道, 反之亦然.

注意到 $W\circ\mathbb{T}^\infty=W$, 我们可仍然用 $W$ 表示定义在 $\mathscr{X}_{p,q}/\mathbb{T}^\infty$ 上的函数. 显然, $\mathscr{X}_{p,q}/\mathbb{T}^\infty$ 是紧连通空间, $W$ 因而在其上取到最大值. 可以证明, 如果 $W$ 在 $x\in\mathscr{X}_{p,q}/\mathbb{T}^\infty$ 处取最大值, 则 $x$ 是平衡点, 因而也是 $f$ 的 $q$ 周期轨道. 我们称这种轨道为 Birkhoff$(p, q)$型最大轨. 设 $x$ 是这样的点, 由 $x$ 我们可以用下列方式定义 $x_+\in\mathscr{X}_{p,q}$

$$(x_+)_i = x_{i+i_0} + j_0.$$

其中 $pi_0+qj_0$ 是 $\{pi+qj:\ i、j\in\mathbb{Z}\}$ 中的最小正数. 在 $\mathscr{X}_{p,q}/\mathbf{T}^\infty$ 中, $x_+\neq x$, 但是 $W(x_+)=W(x)=\max\limits_{\mathscr{X}_{p,q}} W:=W_{p,q,\max}$. 考虑所有以 $x$ 和 $x_+$ 为两端点的通路 $\gamma$, 沿用上面的记号,

$$\sup_\gamma \min_t W_{p,q}(\gamma(t)):=W_{p,q,\min\max}.$$

置

$$\Delta W_{p,q}=W_{p,q,\max}-W_{p,q,\min\max}.$$

现在考虑 $\omega$ 为无理数的情形. 可以证明, 如果 $\omega$ 是无理数, $\rho(f_0)<\omega<\rho(f_1)$, 当 $p/q\to\omega$ 时, $\Delta W_{p,q}$ 收敛于一极限, 记为 $\Delta W_\omega$. 马瑟证明, 相应于旋转数 $\omega$ 的不变圈存在与否的充分必要条件是 $\Delta W_\omega=0$.

运用这样一个变分原理(或有一些无本质性的修改), 可以证明马瑟于 1988 年发表的结果[30]. 他证明, 如果 $\omega$ 是有理数或刘维尔数, 存在任意充分接近可积的 $C^\infty$ 系统, 它不具有旋转数为 $\omega$ 的不变曲线. 换句话说, 考虑下列扭转映射

$$\begin{cases} r_1=r+R(r,\ \varphi), \\ \varphi_1=\varphi+f(r)+\Phi(r,\ \varphi), \end{cases}$$

如果 $f(r_0)$ 是有理数或刘维尔数, 无论 $d>0$ 怎样小, 总存在 $R_1$ 和 $\Phi$ 使得 $|R|+|\Phi|<d$, 但上述映射在 $r=r_0$ 附近没有旋转数为 $f(r_0)$ 的不变曲线. 有一点应该注意, 固定这样的 $R$ 和 $\Phi$, 我们并不知道对应于其他有理数或刘维尔数的不变圈是否存在.

从 KAM 定理的证明过程可以看出 Diophantine 条件在证明技术上的重要性. 然而, 若非马瑟的结果, 我们不能了解这种 Diophantine 条件是本质性的, 而绝非仅是技术上的要求.

## §13 无穷维哈密顿系统的 KAM 理论

顾名思义, 这样的哈密顿系统有无穷多自由度, 相应的运动方

程或是无穷阶常微分方程组或是偏微分方程. 对于前者, 一个例子便是具有 Frenkel-Kontorova 势的无穷粒子系统. 在直线 $-\infty<q<+\infty$ 上有无限多个粒子 $P_n$, 他们之间的相互作用依照势

$$U=\gamma\sum_n f(q_n)+\chi\sum_n(q_{n+1}-q_n-a)^2,$$

其中 $q_n$ 是第 $n$ 个粒子 $P_n$ 的坐标, $f(q)$ 是 $C^\infty$ 函数, 关于 $q$ 是 $a$ 周期 $(a>0)$. 在 $q=na$ 处取最小值, $q=\left(n+\frac{1}{2}\right)a$ 处取最大值, $\gamma>0$、$\chi>0$ 是参数. 这样一个系统表示在具有势为 $\gamma f$ 的外场下的一串弹簧振子. 如果用 $m_n$ 表示粒子 $P_n$ 的质量, $v_n$ 表示其速度, 那么相应的哈密顿量就是

$$H=\sum_n(m_n v_n^2/2)+U=\sum_n p_n^2/2m_n+U, \tag{13.1}$$

其中 $p_n=m_n v_n$. 粒子的运动因而遵守如下无穷多常微分方程组

$$\frac{m_n}{2\chi}\frac{d^2q_n}{dt^2}=-\frac{\gamma}{2\chi}\varphi(q_n)+q_{n+1}-2q_n+q_{n-1} \tag{13.2}$$

其中 $\varphi=f'$. 注意到在 $q_n=na$ 处 $f(q)$ 取最小值, 这相应于稳定平衡位置, 从几何上讲, 这相应于椭圆型不动点. 如果引进作用和角变量, 在 $q_n=na$ 处展开 $\varphi(q_n)$, 可望得到一个 KAM 形式的哈密顿量.

至于用偏微分方程表示的哈密顿系统, 一个典型的例子是非线性波动方程

$$u_{tt}-u_{xx}+f(x, u)=0. \tag{13.3}$$

对于偏微分方程, 相应的哈密顿量一般是积分 $H(u)$, 相应的哈密顿方程具有形式

$$u_t=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta u},$$

$\delta H/\delta u$ 是 $H$ 关于 $u$ 的变分导数, $u$ 可以是向量值函数. 对于 KdV 方程, $H=\int\left(\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}u_t^2-u^3\right)dx$, 这对应于方程

$$u_t+uu_x+6u_{xxx}=0.$$

此处 $\frac{\partial}{\partial x}$ 扮演了有限维哈密顿系统中 $J$ 的角色.

考虑到§7~§12中我们得到过有限自由度系统中最大维不变环面和低维不变环面存在性等结果,类似地,我们也可以提出无限多自由度中最大维和低维不变环面是否存在这样的问题. 既然所考虑的系统具有无限多自由度, 那么最大维环面必然是无限维的(如果存在),而低维环面可以具有无限维,也可以只是有限维.众所周知,有限维系统与无限维系统具有若干本质上不同的性质,这种差异势必影响到KAM理论是否对无限维哈密顿系统成立这样一个问题. 本书并不试图叙述一个统一的无穷维哈密顿系统KAM理论,而是只给出一个比较典型的例子. 因为到目前为止,相应于离散谱的KAM理论在许多情况下是对的,而相应于连续谱的理论是否可以建立尚是不知.

作为寻找无限维哈密顿系统中有限维低维环面的一例,C. Wayne[54]研究了如下系统

$$u_{tt}-u_{xx}+v(x)u(x,\ t)+\varepsilon u^3(x,\ t)=0, \tag{13.4}$$

$$0\leqslant x\leqslant 1,\ t\geqslant 0,\ u(0,\ t)=u(1,\ t)=0,\ v\in L^2[0,\ 1],$$

得到了具有任意有限个频率的拟周期解. 这些拟周期解是在零解附近. 由于是寻找零解附近的解,(13.4)式可以认为是(13.3)式一个近似. 事实上,可以展开 $f(x,\ u)$ 成为关于 $u$ 的泰勒级数

$$f(x,\ u)=f(x,\ 0)+f_u(x,\ 0)u+O(u^2)$$

并假设 $f(x,\ 0)=0$. 从物理意义上讲,这表示在静止位置没有外力作用. 仅仅取 $u^3$ 项作为高阶近似是为了处理方便. Wayne 处理此类问题的方法可以推广到研究有限阶的泰勒展开式, 但是对于任意的仅是实解析函数形式,这种技巧是否能适用,或者任意有限个频率的拟周期解是否存在,还尚不知.

作为条件, Wayne 将势函数 $v(x)$ 限制在 $L^2$ 的子空间

$$E_0=\left\{v\in L^2[0,\ 1]:\int_0^1 v(x)dx=0,\ v(x)=v(1-x)\right\}$$

内. 要求其平均值为 0 并不特别, 因为这可以通过平移 $\varepsilon=0$ 时 (13.4)式的特征值来达到. 要求 $v$ 是偶函数是为了简化证明. 不仅如此, $v$ 还要求满足这样的条件: 斯图姆-刘维尔算子 $L_v=\frac{d^2}{dx^2}-v$ 的谱必须是负的, 这样相应于纯椭圆型情形. 由于在一般情况下 $L_v$ 的谱在正半轴上只是有限个谱点, 那种情况相应于双曲椭圆型, 这将使论证更复杂. 同时, 按照有限维系统研究的经验, 这并不影响到低维环面的存在性.

到目前为止, KAM 方法似乎只适用于可数多自由度哈密顿系统. 为了将(13.4)转化为这种形式, 我们要考虑斯图姆-刘维尔算子 $L_v$ 的特征值和特征函数, 边界条件自然是狄利克雷条件. 在把 $v$ 约束到 $E_0$ 上以后, 如下结果成立:

**引理 1** $L_v$ 的特征函数 $\{\psi^n\}_{n\geq 1}$ 构成 $L^2[0, 1]$ 上一个完备的正交系. 特征值 $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ 则构成一个递减序列, 并遵循如下渐近估计

$$\mu_n=-n^2\pi^2+l^2(n), \qquad n=1, 2, \cdots\cdots \quad (13.5)$$

令人惊讶的是, 任一具有(13.5)形式的递减序列必相应于某一个 $L_v$ 的谱. 令 $S$ 表示所有这样的序列, $\mu$ 表示 $E_0\to S$ 的映射, 由 $L_v$ 的谱决定. 于是, 我们有如下结果

**引理 2** $\mu$ 是 $E_0$ 和 $S$ 间的实解析同构.

固定 $v$, 取 $\{\psi^n\}$ 为 $L_v$ 的归一化特征函数, 我们可以将(13.4)的解 $u(x, t)$ 表示为

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\psi^n(x). \qquad (13.6)$$

将此表达式代入(13.4)式, 假设求和与求导次序可交换, (13.4)式等价于一个无穷阶常微分方程组:

$$\ddot{q}_j(t)=\mu_j q_j(t)-\varepsilon\sum_{j_1, j_2, j_3\geq 1} q_{j_1}(t)q_{j_2}(t)q_{j_3}(t)(\psi^j, \psi^{j_1}\psi^{j_2}\psi^{j_3}) \qquad (13.7)$$

$(\cdot, \cdot)$表示 $L^2[0, 1]$上的内积. (13.7)式有一个哈密顿量

$$H(p, q)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2}(p_j^2-\mu_j q_j^2)$$

$$-\frac{\varepsilon}{4}\sum_{j,j_1,j_2,j_3,j_4} q_{j_1}q_{j_2}q_{j_3}q_{j_4}(\psi^{j_1}, \psi^{j_2}\psi^{j_3}\psi^{j}) \quad (13.8)$$

(13.8)是一个无穷多振子系统，由非线性项加以耦合. 但这些非线性项不具有所谓局部空间分布性质. 换句话说，非线性部分不能表示成若干项的组合，而每一项只与邻近有限个变量有关. 到目前为止，这种局部空间分布性质是寻找无穷维环面存在性的必要条件之一. 这在下面将有叙述. 因此，对于(13.7)这样的系统，我们只试图寻找具有有限个频率的拟周期解.

假设我们希望寻找相应于 $j_1, \cdots, j_N$ 模态被激发而其它模态被抑制的周期解，我们总可以通过重新排列特征值而使得在此排列下被激发的是 1, 2, …, $N$ 模态. 由于只是寻找有限个频率的拟周期解，这样的重新排列并不改变特征值的渐近性质(13.5).

由于已经限制 $v$ 的选取，使得 $L_v$ 的谱点都在负半轴，我们可取所寻找的拟周期解的基本频率接近于$(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N)$, $\omega_j=\sqrt{|\mu_j|}$ 这里 $j=1, 2, \cdots$). 若没有扰动，即 $\varepsilon=0$, (13.4)显然有拟周期解

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{N} q_{n_0}\cos(\omega_n t+\varphi_{n_0})\psi_n(x).$$

记 $\Omega=(\omega_1, \cdots, \omega_N)$，根据研究有限维系统中低维环面存在性的经验，我们假设如下非共振条件成立：

(D.1) $|n\cdot\Omega\pm j\pi|\geqslant D_0^{(1)}(|n|+j)^{-\tau}$, $\quad\forall n\in\mathbb{Z}^N\setminus\{0\},\ j\geqslant 0$

(D.2) $|n\cdot\Omega\pm\omega_j|\geqslant D_0^{(1)}(|n|+j)^{-\tau}$, $\quad\forall n\in\mathbb{Z}^N\setminus\{0\},\ j\geqslant N+1$

(D.3) $|n\cdot\Omega\pm(\omega_j\pm\omega_l)|\geqslant D_0^{(2)}(|n|+|j-l|)^{-4\tau}$. $\quad\forall n\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\},\ j, l\geqslant N+1$

$D_0^{(1)}$、$D_0^{(2)}$ 和 $\tau$ 是一些正常数.

引进新的正则变量. 定义

$$q_j=\sqrt{I_j/\omega_j}\cos\varphi_j,\ p_j=-\sqrt{I_j/\omega_j}\sin\varphi_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots N$$

$$z_j=\sqrt{\frac{1}{2\omega_j}}(p_j-i\omega_jq_j),\ \bar{z}_j=\sqrt{\frac{1}{2\omega_j}}(p_j+i\omega_jq_j),\ j\geqslant N+1 \tag{13.9}$$

在新变量$(I,\ \varphi,\ z,\ \bar{z})$之下，哈密顿量(13.8)形式上可以写成

$$H(I,\ \varphi;z,\ \bar{z})=\sum_{j=1}^{N}\omega_jI_j+\sum_{j=N+1}^{\infty}\omega_jz_j\bar{z}_j+\frac{\varepsilon}{4}g(I,\ \varphi;z,\ \bar{z}).$$

(13.8)式中，无限和的收敛性并不是很明显的，因为这涉及到这些正则变量定义在什么样的区域内才收敛的问题．关于$q_j$的定义域的选取，是十分技术性的，(13.5)所表示的特征值渐近性质以及(D1～D3)非共振条件等因素都被加以考虑，此处不仔细论述．我们现在所感兴趣的是在$I=(I_1,\ I_2,\ \cdots I_N)=I^0$，$z=\bar{z}=0$附近摄动的情况．取$J=I-I^0$，相应的哈密顿量就是

$$H(J,\ \varphi;\ z,\ \bar{z})=\text{常数}+\sum_{j=1}^{N}\omega_jJ_j+\sum_{j=N+1}^{\infty}\omega_jz_j\bar{z}_j$$

$$+\frac{\varepsilon}{4}f(I^0,\ J,\ \varphi;\ z,\ \bar{z}). \tag{13.10}$$

可以证明，$f$可以在一个复区域内展开为$J,\ z,\ \bar{z}$的幂级数．如果此级数只含有二次或更高次项，$J=z=\bar{z}=0$将是下列方程的不变环面：

$$\dot{J}_j=-\frac{\varepsilon}{4}\frac{\partial f}{\partial\varphi_j};\quad \dot{\varphi}_j=\omega_j+\frac{\varepsilon}{4}\frac{\partial f}{\partial J_j},\qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

$$\dot{z}_j=-i\omega_j\bar{z}_j-i\frac{\varepsilon}{4}\frac{\partial f}{\partial\bar{z}_j};$$

$$\dot{\bar{z}}_j=i\omega_jz_j+i\frac{\varepsilon}{4}\frac{\partial f}{\partial z_j}.\qquad j\geqslant N+1$$

基于这层考虑，我们不是试图通过正则坐标变换来消除非线性项$f$，而只是试图消除$f$的低阶项．这样，$f$就可以分为两部分，一部分是不高于三次多项式之和，另一部分是高阶项．高阶项部分在采用近恒等变换后仍然是高阶小量，而要消除不高于三次多项式之和，情况与研究有限自由度哈密顿系统中椭圆低维不变环面

类似，只要非共振关系 D2、D3 便足够．这样做的优点是可以避免要求太多的非共振关系，即 D2、D3 中不只是一、两个 $\omega_j(j\geqslant N+1)$ 而是任意多个，而且本问题中的 $\omega_j(j=1,2,\cdots)$ 是否能够满足这样的关系也是未知的．

采用与证明有限自由度哈密顿系统中椭圆型不变环面存在性相似的办法，引进一系列正则坐标变换．由于所寻找环面的维数有限，这种技术对余维数是否有限的依赖程度并不高．在每一次迭代以后，由于扰动项中关于 $\varphi$ 平均项，产生频率漂移．由 §8～§10 的研究，我们知道频率漂移对迭代收敛性的影响是很大的．稍加分析可知，$f$ 中以下各项会对频率有影响，

(i) $z_j$ 和 $\bar{z}_j$ 总是以 $(z_j\bar{z}_j)$ 形式出现；

(ii) 关于 $I_j(z_j\bar{z}_j)$ 二次项；

(iii) 关于 $\varphi$ 无关．

根据这三项原则可知影响频率的部分

$$\varepsilon\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{3}{4}\right)\frac{I_jI_j}{\omega_j^2}(\psi^j\psi^j,\ \psi^j\psi^j)+\varepsilon\sum_{\substack{j,l=1\\ j\neq l}}^{N}\left(\frac{1}{4}\right)\frac{I_jI_l}{\omega_j\omega_l}(\psi^j\psi^j,\ \psi^l\psi^l)$$

$$+\varepsilon\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)\frac{I_jz_l\bar{z}_l}{\omega_j\omega_l}(\psi^j\psi^j,\ \psi^l\psi^l),$$

因而频率的改变是：

$$\omega_j\to\widetilde{\Omega}_j(I)=\omega_j+\varepsilon\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{I_j}{\omega_j^2}\right)(\psi^j\psi^j,\ \psi^j\psi^j)$$

$$+\varepsilon\sum_{\substack{l=1\\ j\neq l}}^{N}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{I_l}{\omega_j\omega_l}\right)(\psi^j\psi^j,\ \psi^l\psi^l).\qquad(13.11)$$

由此可得到 KAM 步骤中一个重要的量

$$\left(\frac{\partial\widetilde{\Omega}}{\partial I}\right)_{ij}=\delta_{ij}\left(\frac{3\varepsilon}{4\omega_j^2}\right)(\psi^j\psi^j,\ \psi^j\psi^j)$$

$$+(1-\delta_{ij})\frac{\varepsilon}{4\omega_i\omega_j}(\psi^i\psi^i,\ \psi^j\psi^j).$$

为了控制迭代过程中出现的小分母问题，$\left(\frac{\partial\widetilde{\Omega}}{\partial I}\right)_{ij}$ 必须是可逆的．

可以证明，对于 $N=1, 2, 3$，这个矩阵总是可逆的；而对于 $N\geqslant 4$，目前只能证明去除一个零测度集，对其余所有的势 $v$，这个矩阵是可逆的，而且还有估计 $\det\left(\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial I}\right)=cs^N$，$c$ 依赖于 $v$.

现在我们解释一下此处的"测度"是什么含意. 定义

$$l_k^2=\{(x_1, x_2, \cdots):\sum_{n>1}(n^k x_n)^2<\infty\}.$$

在这样的定义下，在空间 $l_2^2$ 上可以定义高斯概率测度. 在每一个分量上取高斯分布

$$dP_n^\alpha(x_n)=\frac{n^\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-n^{2\alpha}x_n^2}dx_n, \tag{13.12}$$

然后取无穷乘积. 如果记乘积测度为 $dP^\alpha$，当 $\alpha>\frac{3}{2}$ 时 $l_2^2$ 具有全测度. 考虑斯图姆-刘维尔算子 $L_v=\frac{d^2}{dx^2}-v$，对于 $v\in E_0$，记其谱点为 $\mu_1>\mu_2>\cdots$. 根据假设 $\mu_1<0$，由于引理(7.1)，$\mu_n$ 有渐近形式

$$-\mu_n=(n\pi)^2+l^2(n).$$

由于基本频率 $\omega_n=\sqrt{|\mu_n|}$，下面的引理是有用的.

**引理 3** 一个递增正序列 $\{\omega_n\}$ 可以表示成具有(13.5)形式 $\mu_n=-\omega_n^2$ 的充要条件是

$$\omega_n=n\pi(1+x_n),$$

其中 $\{x_n\}\in l_2^2$.

由于引理(7.2)，$E_0$ 和 $S$ 间有一个实解析同构. 取上面定义的高斯概率测度为我们所指的测度.

记 $\omega_n=(n\pi)(1+x_n)$，$\Omega=(\omega_1, \cdots\omega_N)$，可以证明除去一个相对于测度 $dP^\alpha$ 的零测集，$\{\omega_n\}$ 总是满足(D1～D3)，当然常数 $D_0^{(1)}$, $D_0^{(2)}$ 和 $\tau$ 依赖于 $\omega_n$.

根据以上的讨论，可以预见下面的定理成立，详细证明见[54].

**定理 1** (C. E. Wayne, 1990) 相对于概率测度而言，除去

一个零测集，对其他所有的势函数 $v$，总存在 $\varepsilon_0>0$，依赖于 $v$，只要 $|\varepsilon|<\varepsilon_0$，系统(13.8)总存在周期($N=1$)或拟周期解($N>1$)，其频率 $\tilde{\Omega}$ 满足关系 $|\Omega-\tilde{\Omega}|\sim O(\varepsilon)$，而且解 $q_j(t)$ 有渐近估计

$$\sup_t |q_j(t)|\leqslant K_2 j^{-\frac{14}{10}},$$

其中 $K_2>0$.

定理1只是说明了具有任意有限个基本频率的拟周期解的存在性. 随着 $N$ 的增大，按照[54]中的方法，$\varepsilon_0$ 就越小. 是否有无限个基本频率的拟周期解，尚不可知. 是否存在无限维哈密顿系统具有无限多基本频率的拟周期解呢？L. Pustylnikov 证明对具有 Frenkel-kontorova 势的振子系统(13.2)，如果当 $n$ 充分大时 $m_n$ 充分小，(13.2)在零解附近存在具有无限多基本频率的拟周期解[47]. 他用的方法比较特殊，将问题转化为一系列保面积映射. J. Pöschel 则试图建立这方面稍一般的 KAM 理论. 他的思想来自 Bellissard, Fröhlich, 斯潘塞 (D. C. Spencer), Vittot 以及 Wayne[18],[53]，主要想法是将非可积扰动不看成一整块，而是若干小块的和. 每一个扰动只是局限于空间某一部分. 他的出发点是研究任意可数多的简谐振子，这些振子位于一个格点空间 $\Lambda$ 内. 一个单独振子的构形由作用-角变量 $\varphi_\lambda$、$I_\lambda$ 描述，运动频率为 $\omega_\lambda$，$\lambda\in\Lambda$. 这样一个系统的哈密顿量就是

$$N=e+\sum_{\lambda\in\Lambda}\omega_\lambda I_\lambda=e+\langle\omega,\ I\rangle,$$

相应的运动方程就是

$$\dot{\varphi}=\omega,\quad \dot{I}=0,$$

所在的相空间是

$$\mathscr{P}=\mathbb{T}^\Lambda\times\mathbb{R}^\Lambda.$$

这是一个线性系统. 即使对于有限自由度系统，由§8的讨论，给定 $\omega$ 也不一定有 KAM 环面存在. 但是，如果将 $\omega$ 看成参数，在参数空间 $\mathbb{R}^\Lambda$ 的某一开集上取值，可以考虑对 $\omega$ 是否有足够多的选择使得 KAM 环面存在. 这实际上是将考虑某一个哈密顿系统

转化为考虑一族线性哈密顿系统. 这样做的好处是进行 KAM 迭代时可以简化论证. 这样一个系统的最大维不变环面是

$$\mathbb{T}=\mathbb{T}^{\Lambda}\times\{0\}.$$

不考虑任意 KAM 型的哈密顿量, 我们考虑具有下面特殊形式的系统:

$$H=N+P,\quad P=\sum_{A\in\mathscr{T}}P_A.$$

$\mathscr{T}$ 是一个 $\Lambda$ 的有限集 $A$ 构成的集族, $P_A$ 表示扰动只发生在集合 $A$ 上. 对每个 $A$, 可以赋于非负值$[A]$, 称为权函数. 它反映了 $A$ 的规模以及在空间 $\Lambda$ 中的位置. 假设这种形式的扰动之目的在于控制小分母的大小, 它的形式与有限维系统类似, 即

$$\langle k,\ \omega\rangle=\sum_{\lambda\in\Lambda}k_\lambda\omega_\lambda.$$

因为对扰动要求了空间结构, 所以 $\mathrm{supp}k=\{\lambda:\ k_\lambda\neq 0\}$ 是有限集. 我们要求 $P$ 的分量急剧减小, 以便估计小分母的下界, 这不仅与 $k$ 的模 $|k|=\sum_{\lambda\in\Lambda}|k_\lambda|$ 有关, 而且还依赖于支集 $A$ 的权函数

$$[\![k]\!]=\min_{\mathrm{supp}\,k\subseteq A\in\varphi}[A].$$

$$|\langle k,\ \omega\rangle|\geqslant\frac{\alpha}{\Delta([\![k]\!])\Delta(|k|)},\qquad 0\neq k\in\mathbb{Z}^{\Lambda}$$

$\Delta$ 是所谓逼近函数, 由 H. Rüssman 引进以替代$|k|^{\mu}$. 由小分母的这种下界估计可以看出, KAM 迭代对证明这种无限维不变环面是否存在, 能否成功的关键在于权函数$[\![\cdot]\!]$的选取. 如果它太轻, 那什么也没有; 如果太重, 那 $P_A$ 必须以极快的速度减小, 因而不能适用于一些有物理意义的系统. 关键是找到一个恰当的平衡点. 对于(13.8)这样的系统, 目前还不能找到合适的权函数$[\![\cdot]\!]$. 读者若对详细过程感兴趣可参见[46].

以上研究的系统均是相应于“离散谱”的情形. 方程(13.4)相应的斯图姆-刘维尔算子的谱均是离散的谱点. 相应于“连续谱”的情况怎样呢? 具有“连续谱”的可积系统有很多, 最典型的是孤子方程, 如 KdV 方程、正弦-戈登方程、非线性薛定谔方程、户田链.

例如对整个直线上的 KdV 方程，如果我们考虑某一孤子解附近的情况，连续谱问题就不可回避．这时的连续谱占据了整个半轴．到目前为止人们一般相信 KAM 理论在这种情况下“不再成立”，因为 KAM 技术在这种情况下似乎不能应用了．J. Denzler 研究了正弦-戈登方程的孤立子解的稳定性[15]，他发现对于受扰方程

$$u_{tt}-u_{xx}+\sin u=\varepsilon f(u)+O(\varepsilon^2),$$

$f$ 是在 $u=0$ 附近实解析的函数，孤立子解是不稳定的．作为定义，孤立子解 $u(x, t)$ 是这样一种解，在空间上，当 $|x|\to\infty$ 时 $|u|\to 0$；在时间上，$u$ 关于 $t$ 周期．但是，此处的不稳定是指在扰动下没有孤立子形式的解．换句话说，没有满足如上定义的解．如果不要求如上的定义，而只以形状、动力学行为近似相同来作为判别标准，在一种新的意义下孤立子解是否具有稳定性呢？这仍然是一个悬而未决的问题．这个问题值得我们下大气力去探讨．

# 第3章

# 马瑟集、随机层与阿诺尔德扩散

## §14 正定拉格朗日系统的马瑟集

第2章主要研究了当可积系统受到小扰动以后不变环面的存在性问题. 显然, 当扰动足够大, 这些不变环面一般都要破裂. 当不变环面存在时, 在这些环面上哈密顿系统的流是拟周期流. 当这些环面破裂以后, 是否存在这样的拟周期解呢? I. C. Percival[42],[43]发现, 对于给定一组基本频率, 哈密顿系统的拟周期运动相应于一种变分原理的极值.

为了叙述这一原理, 我们将哈密顿系统转换为拉格朗日系统. 这一转换当然是借助于拉格朗日变换, 相应的拉格朗日量是 $L(q, \dot{q})$. 设 $\omega\in\mathbb{R}^n$ 是所要寻找的拟周期运动的基本频率向量, 对每一光滑的函数 $f: \mathbb{T}^n\to\mathbb{R}$, $x=f(\theta)$, 用记号

$$D_\omega f=\frac{d}{dt}f(\omega t+\theta)\Big|_{t=0}=\frac{\partial f}{\partial\theta}\omega.$$

设 $\Sigma$ 是相空间$\{q, r\}$中一个光滑的 $n$ 维环面, 这个环面是由参数方程刻画的, $q=q_\Sigma(\theta)$, $r=D_\omega q_\Sigma(\theta)$, $\theta \bmod 2\pi\in\mathbb{T}^n$. 任何一个靠近 $\Sigma$ 并具有下列形式的环面, 称为 $\Sigma$ 的一个**变分**:

$$q=q_\Sigma(\theta)+\delta q(\theta),\ r=D_\omega q_\Sigma(\theta)+D_\omega\delta g(\theta).$$

引入泛函

$$\Phi_\omega(\Sigma)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n}L(q_\Sigma(\theta),\ D_\omega q_\Sigma(\theta))d\theta \qquad (14.1)$$

Percival 的变分原理是说:

**定理1** 光滑环面 $\Sigma$ 是系统运动的不变环面. 环面上运动是具有基本频率 $\omega$ 的拟周期流的充分必要条件是 $\Sigma$ 为泛函 $\Phi_\omega$ 的临

界点.

**证明** 注意到 $q_\Sigma$ 和 $\delta q$ 关于 $\theta$ 的 $2\pi$ 周期, $\Phi_\omega$ 的一阶变分是

$$\delta\Phi_\omega=\int_{T^n}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial r}D_\omega\delta q\right)d\theta$$
$$=\int_{T^n}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-D_\omega\frac{\partial L}{\partial r}\right)\delta q d\theta.$$

如果 $\Sigma$ 关于哈密顿流不变, 上面充满了拟周期解 $q_\Sigma(\omega t+\theta)$、$D_\omega q_\Sigma(\omega t+\theta)$, 根据拉格朗日方程 $\delta\Phi_\omega=0$, 即 $\Sigma$ 是 $\Phi_\omega$ 的临界点. 反过来, 如果 $\delta\Phi_\omega=0$, 那么 $D_\omega\dfrac{\partial L}{\partial r}-\dfrac{\partial L}{\partial q}=0$. 因而 $q_\Sigma(\omega t+\theta)$、$D_\omega q_\Sigma(\omega t+\theta)$是系统的拟周期解.

定理 1 指出, 如果有光滑不变环面 $\Sigma$, 则它必是 $\Phi_\omega$ 的驻点. 但对于一般不可积系统, 在一般情况下, 不存在这样的光滑不变环面. 这时, 如果泛函 $\Phi_\omega$ 仍然有临界点, 那么这样的临界点对应着什么呢?按照希尔伯特(D. Hilbert)的名言"任何一个变分问题都有解, 只要这个'解'被恰当地加以理解". 对于 $\Phi_\omega$ 的变分问题, 现在这个"解"在部分情况下已经被较好地理解, 即当拉格朗日量关于 $\dot{q}$ 是正定的时候, 这个"解"称为马瑟集(马瑟 [28]、[31] 和 Aubry[4]). 对于任意有限个自由度系统, 我们仅知道这相应于一个不变测度. 而对于两自由度系统, 我们对这个不变测度的结构了解得更为清楚, 一般称为康托环面(Percival 语). 这实际上通过将一个标准二维环面上的康托集嵌入到相空间而得到的不变集. 在此不变集上, 系统的运动自然是具有指定频率 $\omega$ 的拟周期运动.

康托环面的发现, 是较早的事. 分别由 S. Aubry 和马瑟各自独立地在十余年之前发现. 而且证明途径也很不相同. 这里用马瑟的变分方法去证明这一结果. 沿着这一途径, 马瑟又证明了任意有限自由度系统马瑟集的存在性.

马瑟的出发点是考虑一个圆环域上的保面积扭转映射 $f$. 这样一个映射相应于二自由度自治哈密顿系统.

为方便起见，我们考虑圆环域的通有覆盖 $A$. 取 $A=\{(x, y)\in \mathbb{R}^2; 0\leqslant y\leqslant 1\}$, $T$ 是 $A\to A$ 的平移 $T(x, y)=(x+1, y)$. 设 $f$ 是保面积、保定向、保边界的微分同胚，并与 $T$ 可交换(即 $fT=Tf$). $f$ 要求单调扭转，这相当于只要 $y>z$ 便有 $f(x, y)_1>f(x, z)_1$. 这里下标"1"表示第一分量，即若 $p=(x, y)\in A$ 则 $p_1=x$. 用这种记号，保边界便意味 $f(x, 0)=(f(x, 0), 0)$, $f(x, 1)=(f(x, 1), 1)$.

记 $f_i=f|_{\mathbb{R}\times i}$, $i=0, 1$. 取 $B=\{(x, x')\in \mathbb{R}^2: f_0(x)\leqslant x'\leqslant f_1(x)\}$. 根据扭转条件，对任何 $(x, x')\in B$, 存在唯一 $y=g(x, x')\in[0, 1]$, $y'=g'(x, x')\in[0, 1]$, 使得 $f(x, y)=(x', y')$. 函数 $g$ 与 $g'$ 显然是 $B$ 上的连续函数，$g(x+1, x'+1)=g(x, x')$, $g'(x+1, x'+1)=g'(x, x')$.

对任何 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的同胚 $h$ 使得 $h(x+1)=h(x)+1$, 我们可以认为是一个圆周上同胚自映射的提升. 定义

$$\rho(h)=\lim_{n\to\pm\infty}\frac{h^n(x)}{n}.$$

庞加莱的一定理指出这种定义与 $x$ 的选取无关，因而 $\rho$ 称为旋转数.

**定理 2**(马瑟, 1982) 对任何 $\rho(f_0)\leqslant\omega\leqslant\rho(f_1)$, 存在弱保序映射(不一定连续) $\phi$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得 $\phi(t+1)=\phi(t)+1$,

$$f(\phi(t), \eta(t))=(\phi(t+\omega), \eta(t+\omega)), \tag{14.2}$$

其中 $\eta(t)=g(\phi(t), \phi(t+\omega))$. 如果 $t$ 是 $\phi$ 的连续点，那么 $t+\omega$、$t-\omega$ 也是其连续点. 如果 $\omega$ 是无理数，$\phi$ 在任何区间上都不是常值函数.

(14.2)式说明 $(\phi(t), \eta(t))$ 是从标准圆周 $S^1$ 到圆环域的映射. 此映射将 $S^1$ 上旋转数为 $\omega$ 的刚体，旋转映为 $(\phi, \eta)(S^1)$ 上由 $f$ 确定的运动. 如果 $\omega$ 是有理数，$\omega=\frac{p}{q}$, 定理表示存在 $(x, y)$, 使得 $f^q(x, y)=(x+p, y)$, 即存在 $q$ 周期不动点. 这是伯克霍夫

不动点定理的一个推论. 如果 $\omega$ 是无理数, 记 $M_\phi$ 为 $(\phi(t), \eta(t))$ 的所有连续点构成集合的闭包. 因为 $\phi$ 是保序的, 所以不连续点至多可数个. 因此 $M_\phi$ 是一个所有左极限 $(\phi(t_-), \eta(t_-))$ 和右极限 $(\phi(t_+), \eta(t_+))$ 的并构成的. 记 $\Sigma_\phi = M_\phi/T$. 如果 $\phi$ 连续, $\Sigma_\phi$ 显然同胚于 $S^1$, 这时 $f$ 存在不变圈. 如果记 $\bar{f}$ 为圆环域 $A/T$ 的同胚 $f$ 的提升, $\bar{f}|_{\Sigma_\phi}$ 拓扑共轭于旋转数为 $\omega$ 的刚体旋转. 如果 $\phi$ 不连续, $\Sigma_\phi$ 是一个康托集, 自然关于 $f$ 不变. $\bar{f}|_{\Sigma_\phi}$ 拓扑半共轭于刚体旋转 $t\to\omega+t$.

如上所述, 定理 2 的证明是通过寻找某个泛函的临界点而完成的. 证明的第一步自然是构造合适的泛函.

取 $Y_\omega$ 表示这样的集合, 其中的元素 $\phi$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 具有如下性质: 弱保序, 即若 $x\geqslant y$ 则 $\varphi(x)\geqslant\varphi(y)$; $\phi(t)+1=\phi(t+1)$; $f_0(\phi(t))\leqslant\phi(t+\omega)\leqslant f_1(\phi(t))$; $\phi$ 左连续即 $\phi(t_-)=\phi(t)$. 记 $X_\omega$ 为 $Y_\omega$ 的子集, 如果 $\phi\in X_\omega$ 则当 $t>0$ 时 $\phi(t)\geqslant 0$ 而当 $t\leqslant 0$ 时 $\phi(t)\leqslant 0$.

既然 $f$ 是保面积的, 那么 $ydx-y'dx'=g(x, x')dx-g'(x, x')dx'$ 是 $B$ 上的闭 1-形式, 因而存在 $B$ 上的 $C^r$ 函数 $h(x, x')$, 使得

$$\Delta h(x, x')=g(x, x')dx-g'(x, x')dx'. \tag{14.3}$$

对于 $\phi\in Y_\omega$, 定义泛函

$$F_\omega(\phi)=\int_0^1 h(\phi(t), \phi(t+\omega))dt. \tag{14.4}$$

将(14.4)与(14.3)相比较, 很自然的事是弄清什么是(14.4)具有的拉格朗日方程.

**引理 1** 设 $a\leqslant 0\leqslant b$, $a<b$. $Y_\omega$ 的一个元素 $\phi_s$ 关于 $s$ 在 $a\leqslant s\leqslant b$ 上 $C^2$ 连续, 并且 $\dfrac{\partial\phi_s}{\partial s}(t)$、$\dfrac{\partial^2\phi_s}{\partial s^2}(t)$ 在 $a\leqslant s\leqslant b$, $t\in\mathbb{R}$ 上一致有界, 且可测, 那么

$$\frac{d}{ds}F_\omega(\phi_s)|_{s=0}=\int_0^1 V(\phi, t)\dot{\phi}(t)dt. \tag{14.5}$$

其中 $\dot{\phi}_s(t)=\dfrac{\partial\phi_s}{\partial s}(t)$, $\dot{\phi}=\dot{\phi}_0$, $\phi=\phi_0$, $V(\phi, t)=\dfrac{\partial}{\partial x}[h(\bar{x}, x)+h(x, x')]$, $\bar{x}=\phi(t-\omega)$, $x=\phi(t)$, $x'=\phi(t+\omega)$.

**证明** 根据所给条件，由泰勒公式，

$$\frac{F_\omega(\phi_{\Delta s})-F_\omega(\phi)}{\Delta s}$$

$$=\int_{t=0}^{1}\int_{u=0}^{1}\left[\frac{\partial h}{\partial x}(\phi_{u\Delta s}(t), \phi_{u\Delta s}(t+\omega))\dot{\phi}_{u\Delta s}(t)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial h}{\partial x'}(\phi_{u\Delta s}(t), \phi_{u\Delta s}(t+\omega))\dot{\phi}_{u\Delta s}(t+\omega)\right]dudt.$$

既然 $\dfrac{\partial h}{\partial x}$、$\dfrac{\partial h}{\partial x'}$ 在 $B$ 上一致连续，$\partial\phi_s/\partial s$、$\partial^2\phi_s/\partial s^2$ 一致有界，可以在积分号内取极限．让 $\Delta s\to0$，这时有

$$\frac{d}{ds}F_\omega(\phi_s)\Big|_{s=0}=\int_0^1\left[\frac{\partial h}{\partial x}(\phi(t), \phi(t+\omega))\dot{\phi}(t)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial h}{\partial x'}(\phi(t), \phi(t+\omega))\dot{\phi}(t+\omega)\right]dt$$

$$=\int_0^1 V(\phi, t)\dot{\phi}(t)dt.$$

根据引理1，可以看出，如果 $F_\omega(\phi)$ 有临界点，相应的拉格朗日方程将是

$$V(\phi, t)=0. \qquad \forall t\in\mathbb{R} \quad (14.6)$$

在这种情况下，(14.2)式很容易从这个拉格朗日方程得到．实际上，根据定义(14.3)式和 $V(\phi, t)$ 的表达式，我们有

$$V(\phi, t)=-g'(\bar{x}, x)+g(x, x'). \qquad (14.7)$$

用 $t+\omega$ 代替 $t$，由(14.6)式可得

$$g(\phi(t+\omega), \phi(t+2\omega))=g'(\phi(t), \phi(t+\omega)).$$

根据 $\eta$ 的定义，上式说明

$$\eta(t+\omega)=g'(\phi(t), \phi(t+\omega)),$$

且

$$f(\phi(t), \eta(t))=(\phi(t+\omega), \eta(t+\omega)).$$

因此，一旦能证明 $F_\omega$ 在 $Y_\omega$ 上取得最大值，并且在此处拉格朗日方程成立，我们就完成了定理 2 的证明.

为完成这一证明，首先要在 $Y_\omega$ 上定义度量，$F_\omega$ 关于此度量连续，然后证明对任意 $\omega$ 使得 $\rho(f_0)\leqslant\omega\leqslant\rho(f_1)$，$X_\omega$ 总是非空. 再证明根据 $Y_\omega$ 上定义的度量，$X_\omega$ 是紧集，因而 $F_\omega$ 在 $X_\omega$ 上取到最大值. 定义平移 $T_a$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $T_a(x)=x+a$, 可以证明 $F_\omega$ 关于平移不变，而且对任意 $\phi\in Y_\omega$, 存在 $a\in\mathbb{R}$ 使得 $\phi T_a\in X_\omega$, 因此一旦 $F_\omega$ 在 $\phi$ 处取到在 $X_\omega$ 上的最大值，$F_\omega$ 在 $\phi$ 处也取到在 $Y_\omega$ 上的最大值. 这一性质可以用来证明最大值处有相应的拉格朗日方程(14.6).

首先定义 $Y_\omega$ 上的度量. 对任何弱保序映射 $\phi$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 定义其图为

$$\operatorname{graph}\phi=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2:\ \phi(x_-)\leqslant y\leqslant\phi(x_+)\},$$

如果 $\psi$ 是另一个这样的映射，定义

$$d(\phi,\ \psi)=\max\{\sup_\xi\inf_\eta|\xi-\eta|,\ \ \sup_\eta\inf_\xi|\xi-\eta|\},\tag{14.8}$$

其中 $\eta$ 取遍 $\operatorname{graph}\psi$，而 $\xi$ 取遍 $\operatorname{graph}\phi$，$|\cdot|$表示欧几里德空间 $\mathbb{R}^2$ 上的度量. 当然，这有可能取无穷. 如果将 $\operatorname{graph}\phi$、$\operatorname{graph}\psi$ 看成 $\mathbb{R}^2$ 中的两个集合，(14.8)式实际上是这两个集合的豪斯多夫距离. 显然有 $d(\phi_1,\ \phi_2)\leqslant d(\phi_1,\ \phi_3)+d(\phi_2,\ \phi_3)$.

如果 $\phi\subset X_\omega$, 则 $(0,\ 0)$ 和 $(1,\ 1)\in\operatorname{graph}\phi$, $\phi(t+1)=\phi(t)+1$. 因此，如果 $\phi$、$\psi\in X_\omega$, $d(\phi,\ \psi)$ 可由(14.8)式定义，不过 $\xi$ 只需取遍 $[0,\ 1]^2\cap\operatorname{graph}\varphi$, $\eta$ 取遍 $[0,\ 1]^2\cap\operatorname{graph}\psi$ 即可. 所以，若 $\phi_1$、$\psi\in X_\omega$, $d(\phi,\ \psi)\leqslant1$.

显然，对任意 $a\in\mathbb{R}$, $d(\phi T_a,\ \phi)\leqslant a$. 对任何 $\phi\in Y_\omega$, 只要取 $a=\sup\phi^{-1}(-\infty,\ 0)$, $\phi T_a\in X_\omega$. 从三角不等式可以得到，对 $\varphi_1$、$\psi\in Y_\omega$, $d(\varphi,\ \psi)<\infty$. 为了验证 $d$ 确实是一个距离，我们只需证明如若 $d(\phi,\ \psi)=0$ 便有 $\phi=\psi$, 而这一点由 $\phi\in Y_\omega$ 是左连续这点性质来保证.

下一步是证明 $F:Y_\omega\to\mathbb{R}$ 关于距离(14.8)连续. 为此, 取

$$M=\sup_{(x,x')\in B}\max\{1,\ |g(x,x')|,\ |g'(x,x')|\}.$$

根据 $g$ 和 $g'$ 的定义, 显然有

$$g(x+1,\ x'+1)=g(x,\ x'),\ g'(x+1,\ x'+1)=g'(x,\ x'). \tag{14.9}$$

因此 $M<\infty$. 根据 $F_\omega$ 的定义和中值定理, 由于 $\frac{\partial h}{\partial x}=g$, $\frac{\partial h}{\partial x'}=g'$,

$$|F_\omega(\phi)-F_\omega(\psi)| \leqslant M\int_0^1(|\phi(t)-\psi(t)|+|\phi(t+\omega)-\psi(t+\omega)|)dt. \tag{14.10}$$

对 $0<\varepsilon\leqslant1$, 取 $\delta=\frac{\varepsilon^2}{1000M^2}$. 设 $d(\phi,\ \psi)<\delta$, 我们要证明 $|F_\omega(\phi)-F_\omega(\psi)|<\varepsilon$. 注意到 $d(\phi,\ \psi)<\delta<\frac{1}{1000}$, $\phi(t+1)=\phi(t)+1$, $\psi(t+1)=\psi(t)+1$, $\phi$ 和 $\psi$ 均是单调增的, 容易推出对所有 $t\in\mathbb{R}$ 均有 $|\phi(t)-\psi(t)|\leqslant\frac{1001}{1000}<2$. 同样, 由于 $d(\phi,\ \psi)<\delta$, 如果 $\psi(t)\geqslant\phi(t)+\frac{\varepsilon}{5M}$,

$$\phi(t+\delta)\geqslant\phi(t)+\frac{199\varepsilon}{1000M}; \tag{14.11}$$

而当 $\psi(t)\leqslant\phi(t)-\frac{\varepsilon}{5M}$ 时, 有

$$\phi(t-\delta)\leqslant\phi(t)-\frac{199\varepsilon}{1000M}. \tag{14.12}$$

对于 $a\in\mathbb{R}$, 取 $\pi_a=\left\{t\in(a,\ a+1):\ |\phi(t)-\psi(t)|\geqslant\frac{\varepsilon}{5M}\right\}$, $\pi_a'=\{t\in(a,\ a+1);\ (14.11)式成立\}$; $\pi_a''=\{t\in(a,\ a+1);\ (14.12)式成立\}$. 显然, $\pi_a\subset\pi_a'\cup\pi_a''$.

对任意 $t\in\pi_a'$, $\phi$ 在 $[t,\ t+\delta]$ 上的变差大于 $\frac{199\varepsilon}{1000M}$. 由于 $\phi$

在$(a, a+1)$上的总变差小于1，若用长度为$\delta=\frac{\varepsilon^2}{1000M^2}$的区间去覆盖$\pi_a'$，最多用$\left[\frac{1000M}{199\varepsilon}\right]+1\leqslant\frac{7M}{\varepsilon}$个，便可做到. 因此，$\pi_a'$的勒贝格测度$\mu(\pi_n')\leqslant\frac{7M\delta}{\varepsilon}\leqslant\frac{\varepsilon}{100M}$. 同样，$\mu(\pi_a'')\leqslant\frac{\varepsilon}{100M}$. 所以

$$\mu(\pi_a)\leqslant\mu(\pi_a')+\mu(\pi_a'')\leqslant\frac{\varepsilon}{50M}.$$

由于$|\phi(t)-\psi(t)|\leqslant 2$总是成立的，而当$t\in(0, 1)\setminus\pi$，以及$t\in(\omega, \omega+1)\setminus\pi_\omega$时，总有$|\phi(t)-\psi(t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{5M}$，所以由(14.10)可得

$$|F_\omega(\phi)-F_\omega(\psi)|\leqslant M\left(2\mu(\pi_0)+\varepsilon\mu(\pi_\omega)+\frac{2\varepsilon}{5M}\right)<\varepsilon.$$

现在考虑$Y_\omega$中的子集$X_\omega$. $X_\omega$非空的充要条件是$\rho(f_0)\leqslant\omega\leqslant\rho(f_1)$.

首先证明必要性. 设$\phi\in Y_\omega$. 对任意自然数$n$，根据$Y_\omega$的定义，有$f_0^n(\phi(t))\leqslant\phi(t+n\omega)\leqslant f_1^n(\phi(t))$. 因此，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_0^n(\phi(t))}{n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\phi(t+n\omega)}{n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{f_1^n(\phi(t))}{n}.$$

这相当于

$$\rho(f_0)\leqslant\omega\leqslant\rho(f_1).$$

如果$X_\omega$非空，$Y_\omega$自然非空，从而必要性得证.

然后证明充分性. 对$s\in[0, 1]$，构造$g_s$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$使

$$g_s(t)=sf_1(t)+(1-s)f_0(s).$$

显然，$g_s$是$\mathbb{R}$上的同胚，并且$g_s(t+1)=g_s(t)+1$. 由于$g_s$是$f_1$和$f_0$的线性内插，$\rho(g_s)$关于$s$为单调不减的函数，至少存在$s_0\in[0, 1]$使得$\rho(g_{s0})=\omega$，因为$\rho(g_0)=\rho(f_0)\leqslant\omega\leqslant\rho(f_1)=\rho(g_1)$. 记$g=g_{s_0}$，$\bar{g}$: $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$是$g$在$S^1$上导出的同胚.

对于$\omega$是有理数还是无理数，构造$\phi\in X_\omega$的方法有所不同.

如果$\omega$是有理数，$\omega=\frac{p}{q}$，$p$、$q$互素. 庞加莱的一个定理说明

$\bar{g}$ 的周期点集 $P$ 非空. 记 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的投影为 $\pi$, $\widetilde{P}=\pi^{-1}P$, 我们定义 $\phi(0)$ 取值为 $\widetilde{P}$ 中最大的非正元素. 任意 $t\in\mathbb{R}$ 总可以表示成为 $t=n\left(\frac{p}{q}\right)+m+r$, 其中 $n$、$m\in\mathbb{Z}$, $-\frac{1}{q}<r<0$. 定义

$$\phi(t)=g^n(\phi(0))+m,$$

这定义说明 $\phi$ 分段常值且左连续. 由于 $\phi(0)\in\widetilde{P}$, $g^q(\phi(0))=\phi(0)+p$, 因此 $\phi$ 的定义是恰当的. 借助于事实 $\rho(g)=\frac{p}{q}$, 可以证明 $\phi$ 是弱保序的. 用反证法. 如果 $n\left(\frac{p}{q}\right)+m>n'\left(\frac{p}{q}\right)+m'$, 但 $g^n(\phi(0))+m\leqslant g^{n'}(\phi(0))+m'$, 那么 $g^{n-n'}(\phi(0))\leqslant m'-m$. 如果 $n>n'$, 有

$$\rho(g)<\frac{m'-m}{n-n'}<\frac{p}{q},$$

而如果 $n<n'$ 则

$$\rho(g)\geqslant\frac{m'-m}{n-n'}>\frac{p}{q},$$

总是矛盾, 因而 $\phi$ 是弱保序的. 因为 $\phi$ 单调增, 又根据定义 $\phi(0)\leqslant 0$, 所以, 若 $t\leqslant 0$, 总有 $\phi(t)\leqslant 0$. 同时由于 $\phi(0)$ 是 $\widetilde{P}$ 中最大的非正元素, 所以, 当 $t>0$ 时 $\phi(t)>0$. 现在看 $\phi$ 的旋转数是多少. 由定义, $g(\phi(t))=\phi\left(t+\frac{p}{q}\right)$, 所以 $f_0(\phi(t))\leqslant\phi\left(t+\frac{p}{q}\right)\leqslant f_1(\phi(t))$. 这说明 $\phi\in X_\omega$.

如果 $\omega$ 是无理数, 我们知道, 存在一个弱圆周保序映射 $u$: $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, 使得 $u\bar{g}(0)=u(\theta)+\omega(\operatorname{mod}1$, $\theta\in\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, 其中 $\bar{g}$: $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 是由 $g$ 投影产生的. 记 $\tilde{u}$ 是 $u$ 的一个提升, 即 $\pi\tilde{u}=u\pi$. 这样的提升自然不唯一, 但我们通过置 $\tilde{u}(0)=0$ 来固定 $\tilde{u}$. 显然, $\tilde{u}$ 是单调增的. 定义 $\phi(t)=\inf\tilde{u}^{-1}(t)$, $\phi(t)$ 因而左连续、单调增. 由于 $\deg u=1$, 我们有 $\tilde{u}(t+1)=\tilde{u}(t)+1$, $\phi(t+1)=\phi(t)+1$. 根据定义不难得到 $g(\phi(t))=\phi(t+\omega)$, 所以

$$f_0(\phi(t))\leqslant g(\phi(t))=\phi(t+\omega)\leqslant f_1(\phi(t)).$$

如果 $S$ 是$[0, 1]^2$中的闭子集，$d'$ 是豪斯多夫度量，那么 $(S, d')$是紧的. 映射 $\phi \to \mathrm{graph}\,\phi \cap [0, 1]^2$ 将 $X_\omega$ 等距嵌入 $S$ 作为其闭子集，因此 $X_\omega$ 是紧集. 既然 $X_\omega$ 是紧集，$F_\omega$ 连续，那么 $F_\omega$ 在 $X_\omega$ 上能取到其在 $X_\omega$ 上的上确界. 如果能够证明 $F_\omega$ 关于平移不变，那么 $F_\omega$ 就可以在 $X_\omega$ 上取得在 $Y_\omega$ 上的最大值.

由(14.9)式可知 $h(x+1, x'+1)-h(x, x')$是常数 $C$，

$$C=\int_\gamma g(x, x')dx-g'(x, x')dx'.$$

式中 $\gamma$ 是 $B$ 中连续$(x, x')$与$(x+1, x'+1)$的任意一条道路. 取 $\gamma_1$ 是连接$(x, x')$与$(x, f_0(x))$的直线，$\gamma_2$ 是曲线$\{(t, f_0(t)): x\leqslant t\leqslant x+1\}$，$\gamma_3$ 是连接$(x+1, x'+1)$与$(x+1, f_0(x)+1)$的直线. 注意到在 $\gamma_2$ 上积分号下的 1-形式恒为 0，因此 $C=0$，即 $h(x+1, x'+1)=h(x, x')$. 由此关系式以及 $\phi(t+1)=\phi(t+1)$，可知 $F_\omega$ 关于平移不变.

根据上面的讨论，我们知道存在 $\phi^*\in X_\omega\subset Y_\omega$，$F_\omega$ 在 $\phi^*$ 处取得极大值. 现在所要解决的问题是证明 $\phi^*$ 满足拉格朗日方程(14.6). 与普通变分原理不同，此处这一点并不显然，这是由 $Y_\omega$ 上的函数类性质决定的. 为了达到此项目的，我们首先要弄清 $\phi^*$ 应该有什么性质.

考虑如下关系式:

$$\phi(t)=f_0(\phi(t-\omega)),\ \phi(t+\omega)>f_0(\phi(t)) \tag{14.13}$$

$$\phi(t)<f_1(\phi(t-\omega)),\ \phi(t+\omega)=f_1(\phi(t)) \tag{14.14}$$

$$\phi(t)>f_0(\phi(t-\omega)),\ \phi(t+\omega)=f_0(\phi(t)), \tag{14.15}$$

$$\phi(t)=f_1(\phi(t-\omega)),\ \phi(t+\omega)<f_1(\phi(t)). \tag{14.16}$$

**引理 2** 如果(14.13)或(14.14)成立，则 $V(\phi, t)>0$；如果(14.15)或(14.16)成立，则 $V(\phi, t)<0$.

**证明** 根据 $g$ 和 $g'$ 的定义，可知

$$x'=f_0(x)\Leftrightarrow g(x, x')=0\Leftrightarrow g'(x, x')=0,$$

$$x'=f_1(x)\Leftrightarrow g(x, x')=1\Leftrightarrow g'(x, x')=1.$$

由$V(\phi, t)$的定义，以上这些恒等关系以及$0\leqslant g(x, x')\leqslant 1$，$0\leqslant g'(x, x')\leqslant 1$，立即可得引理的结论.

由引理2可以想象，如果这些关系中有一个为真，则$F_\omega$不可能在$\phi$处取到最大值. 但证明这一点要借助于三个单参数函数族的构造.

固定$t_0\in\mathbb{R}$，$\phi\in Y_\omega$，单参数函数族$\phi_s$、$\psi_s$和$\xi_s$的构造依赖于选取一$C^\infty$函数$\rho: \mathbb{R}/\mathbb{Z}\to[0, 1]$. 设$\rho$在$\pi(t_0)$附近恒等于1，取$u_s: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$是一族微分同胚，参数$s\in\mathbb{R}$. $u_s$光滑依赖于$s\in\mathbb{R}$，$t\in\mathbb{R}$并使得$u_0=id$，$\dfrac{\partial u_s}{\partial s}(t)=\rho\pi u_s(t)$. 常微分方程解的存在、唯一性决定了这样的单参数族的存在与唯一性.

定义$\phi_s=u_s\phi$. 对于$|s|$充分小，$\phi_s$不一定属于$Y_\omega$，但是如果对$a\leqslant s\leqslant b$（这里$a\leqslant 0\leqslant b$，$a<b$）有$\phi_s\in Y_s$，引理1中的条件成立. 根据(14.5)式，

$$\frac{d}{ds}F_\omega(\phi_s)\bigg|_{s=0}=\int_0^1 V(\phi, t)\rho\pi\phi(t)dt. \qquad (14.17)$$

取$t_1=\sup\phi^{-1}\left(\phi(t_0)+\dfrac{1}{2}\right)$，定义

$$\psi_s(t)=\begin{cases}u_s\phi(t), & \text{如果存在 } n\in\mathbb{Z},\ t_0+n\leqslant t<t_1+n;\\ \phi(t), & \text{其他情况,}\end{cases}$$

$$\xi_s(t)=\begin{cases}\phi(t), & \text{如果存在 } n\in\mathbb{Z},\ t_0+n\leqslant t<t_1+n;\\ u_s\phi(t), & \text{其他情况.}\end{cases}$$

同样，对于$|s|$充分小，以上定义的$\psi_s$和$\xi_s$也不一定在$Y_\omega$中，但是一旦对于$a\leqslant s\leqslant b$（其中$a\leqslant 0\leqslant b$，$a<b$），引理1中的假设也成立. 于是，

$$\frac{d}{ds}F_\omega(\psi_s)\bigg|_{s=0}=\int_{t_0}^{t_1}V(\phi, t)\rho\pi\phi(t)dt, \qquad (14.18)$$

$$\frac{d}{ds}F_\omega(\xi_s)\bigg|_{s=0}=\int_{t_1-1}^{t_0}V(\phi, t)\rho\pi\phi(t)dt. \qquad (14.19)$$

现在我们可以证明：若在$t=t_0$处(14.13)～(14.16)中有一个

关系式成立，并且 $t=t_0$，$t=t_0-\omega$ 和 $t=t_0+\omega$ 都是 $\phi$ 的连续点，则 $F_\omega$ 不在 $\phi$ 处取最大值.

设 $t_0=\phi^{-1}\phi(t_0)$. 只要 $\rho$ 的支集在 $\pi\phi(t_0)$ 的一个充分小的区间内，对 $s\geqslant 0$，$\phi_s\in Y_\omega$(或对 $s\leqslant 0|s|$ 充分小)，根据(14.17)式和引理 2，$\left.\frac{d}{ds}F_\omega(\phi_s)\right|_{s=0}>0$(或小于 0). 如果(14.13)或(14.14)式对 $t=t_0$ 成立(14.15)式或(14.16)式成立). 因此，$F$ 在 $\phi$ 处不取最大值.

如果 $t_0\neq\phi^{-1}\phi(t_0)$，$\phi^{-1}\phi(t_0)$ 是一个区间. 记 $\alpha$ 和 $\beta$ 分别为这个区间的两个端点，$\alpha<\beta$. 当 $t=t_0$ 时，如果(14.13)或(14.14)式成立，那么对 $t\in[t_0, \beta)$ 亦成立，而且在 $(\alpha, \beta)$ 内 $V(\phi, t)$ 还是 $t$ 的单调增函数(这是由于 $g(x, x')$ 是 $x'$ 的单调增函数而 $g'(x, x')$ 是关于 $x$ 单调减函数). 取 $\rho$ 其支集在 $\pi\phi(t_0)$ 的一个充分小的领域内，对 $s\geqslant 0$ 充分小，按上法构造的 $\psi_s\in Y_\omega$，由(14.18)式以及引理 2，$\left.\frac{d}{ds}F_\omega(\psi_s)\right|_{s=0}>0$. 所以，$F_\omega$ 在 $\phi=\phi_0$ 处不取最大值. 如果(14.15)或(14.16)式成立，证明方法和上面类似，所不同者只是取函数 $\xi_s$，而不是 $\psi_s$，而且是对 $s\leqslant 0$，绝对值充分小. 这样可以推得 $\frac{d}{ds}F_\omega(\xi_s)<0$. 这也说明 $F_\omega$ 在 $\phi=\xi_0$ 处不取最大值.

设 $F_\omega$ 在 $\phi$ 处取最大值. 在做了以上的准备工作之后，现在可以证明当 $t-\omega$、$t$ 和 $t+\omega$ 是 $\phi$ 的连续点时(14.6)式确实成立. 由于 $\phi$ 的不连续点只有可数多个，而且 $V(\phi, t)$ 左连续，所以对任意 $t\in\mathbb{R}$ 均有 $V(\phi, t)=0$.

我们已经知道(14.13)～(14.16)式都不成立. 这表明 $\phi(t)=f_0\phi(t-\omega)\Leftrightarrow\phi(t+\omega)=f_0\phi(t)$ 以及 $\phi(t)=f_1(\phi(t-\omega)\Leftrightarrow\phi(t+\omega)=f_1\phi(t)$. 如取这其中有一个等价关系成立，则显然有 $V(\phi, t)=0$.

因此，只需要考虑这样的情况：$\phi$ 在 $t_0-\omega$、$t_0$ 和 $t_0+\omega$ 处连续，并且 $f_0\phi(t_0-\omega)<\phi(t_0)<f_1\phi(t_0-\omega)$，$f_0\phi(t_0)<\phi(t_0+\omega)<$

$f_1\phi(t)$. 如果 $t_0=\phi^{-1}\phi(t_0)$，取 $\rho$ 在 $\pi\phi(t_0)$ 的充分小邻域内有支集，对 $|s|$ 充分小，$\phi_s\in Y_s$. 既然 $F_\omega$ 在 $\phi$ 处取最大值，

$$\frac{d}{ds}F_\omega(\phi_s)\Big|_{s=0}=0.$$

由于 $V(\phi, t)$ 在 $t=t_0$ 处连续，$\phi(t)$ 在 $t_0$ 处连续，$t_0=\phi^{-1}\phi(t_0)$，加之 $\rho$ 有相当程度的任意性，

$$\int_0^1 V(\phi, t)\rho\pi\phi(t)dt=0$$

意味着 $V(\phi, t_0)=0$. 如果 $t_0\neq\phi^{-1}\phi(t_0)$，$\phi^{-1}\phi(t_0)$ 是一个区间. 仍旧用 $\alpha<\beta$ 表示此区间的两端点. 在 $(\alpha, \beta)$ 上 $V(\phi, t)$ 显然是 $t$ 的增函数. 如同上面的论证一样，取 $\rho$ 的支集在 $\pi\phi(t_0)$ 的充分小邻域内，于是 $\psi_s\in Y_s$ 在 $s\geqslant 0$ 充分小时成立. $\xi_s\in Y_s$ 在 $s\leqslant 0$，绝对值充分小时成立. 因此(14.18)、(14.19)成立. 既然 $F_\omega$ 在 $\phi=\xi_0=\psi_0$ 处取最大值，因此

$$\frac{d}{ds}F_\omega(\psi_s)\Big|_{s=0}\leqslant 0,$$

$$\frac{d}{ds}F_\omega(\xi_s)\Big|_{s=0}\geqslant 0.$$

考虑到在 $(\alpha, \beta)$ 上 $V(\phi, t)$ 是 $t$ 的增函数，(14.18)说明 $V(\phi, t_0)\leqslant 0$，而(14.19)式则说明 $V(\phi, t_0)\geqslant 0$，所以 $V(\phi, t_0)=0$.

设 $\phi$ 在 $t$ 处连续. 注意到 $V$ 关于 $t$ 单调增，$V(\phi, t_+)\geqslant V(\phi, t_-)$，上式成为等式的充分必要条件因而是 $\phi$ 在 $t-\omega$ 以及 $t+\omega$ 处连续. 由于 $\phi$ 是寻找到的解，所以 (14.2) 式成立. 这等价于 $V(\phi, t)=0$. 这说明上式应该是等式，即 $\phi$ 在 $t-\omega$ 和 $t+\omega$ 处均连续.

从以上的证明过程可以看出，如果 $\phi$ 在区间 $(\alpha, \beta)$ 上取常数，那么 $V(\phi, t)$ 在此区域上单调增. 而 $V(\phi, t)$ 取常值的充要条件是 $\phi$ 在 $(\alpha-\omega, \beta-\omega)$ 和 $(\alpha+\omega, \beta+\omega)$ 上是常数. 因为 $V(\phi, t)\equiv 0$，所以 $\phi$ 在 $(\alpha-\omega, \beta-\omega)$ 和 $(\alpha+\omega, \beta+\omega)$ 上也是常数. 注意到 $\phi(t+1)=\phi(t)+1$，重复以上论证，不难得知在 $(\alpha+n\omega+m, \beta+$

$n\omega+m$)上 $\phi$ 总是常数. $((n, m)\in\mathbb{Z}^2)$. 由于 $\omega$ 是无理数, 所以 $\phi$ 在整个 $\mathbb{R}$ 上是常数, 这和 $\phi(t+1)=\phi(t)+1$ 矛盾, 因此 $\phi$ 在任何区间上都不是常数. 这样, 我们就完成了定理 2 的证明.

由以上的证明过程可以看出, 不同于通常的变分原理, 为了得到拉格朗日方程, 我们并不能笼统地构造一单参数族, 当泛函的导数限制在此单参数族上, 由于此单参数族函数的相当任意性而得到拉格朗日方程. 如果 $\varphi$ 是定义在严格单调、并且 $f_0(\phi(t))<\varphi(t+\omega)<f_1(\phi(t))$ 这样一个空间上, 那么这一部分的论证和通常的变分方法并无多大差别. 当然这会引起其他问题.

我们知道, 当哈密顿系统不是近可积时, 在一般情况下不变环面是不存在的, 与之相对应的马瑟集就不是不变圈, 而只是康托环面. 按照马瑟的这种变分原理, 相应的极小化子 $\varphi$ 是一个不连续函数. 对于这种不连续函数, 莫泽(J. K. Moser)设计了一种逼近方法, 通过在泛函中加入所谓"粘性项"来得到具有光滑性的极小化子, 而这一系列极小化子逐点收敛于原有系统的极小化子. 这个泛函是

$$F_\omega^\nu=\int_0^1\{-\nu\log u_0+h(u(\theta),\ u(\theta+\omega))\}d\theta,$$

定义在空间 $X=\{u=u(\theta)$, 在 $\mathbb{R}$ 上单调, $u(\theta+1)=u(\theta)+1\}$ 上. 这个泛函的拉格朗日方程看上去更复杂一些, 是微分差分方程, 因而这种提法看上去使问题更复杂. 但是这样得到的极小化子总是一个微分同胚, 相应的映射 $\varphi^\nu$ 的积分 $G^\nu$ 总是光滑的. 有一点应该注意, $F_\omega^\nu(\nu>0)$ 并不对应于保面积映射, 光滑积分 $G^\nu$ 在弱意义下收敛于一个显然不光滑的积分. 详细论证可参见[40]、[41].

以上我们研究了保面积扭转映射, 相应的马瑟集有很清楚的几何结构图象, 这在本质上和圆周上的同胚的性质有极大的关系. 根据 Denjoy 理论, 圆周上的同胚如果具有 $C^2$ 光滑性, 而且其旋转数是无理数, 那么这个同胚一定拓扑共轭于一个刚体旋转, 若此同胚不具有 $C^2$ 连续性, 则只能是拓扑半共轭于这样的旋转, 具有

这种旋转性质的集合是一个康托集，它对应于我们所称的马瑟集．这种理论能够成功建立的一个关键是在直线上可以建立全序关系，这在高维空间是不可能的．例如，对一个 $\mathbb{T}^2$ 上的 Anosov 同胚是不可能建立旋转向量的概念的．

在得到保面积扭转映射的马瑟集以后人们自然要问对任意有限个自由度的哈密顿系统是否存在这样的集合呢？当然，这种集合的定义需要明确．考虑到上面的论述，初看上去很难期望任意有限自由度系统中能存在象扭转映射系统中所显示的马瑟集那样明晰的结构．按照马瑟的说法，研究 $n$ 个自由度哈密顿系统中马瑟集的问题的主要困难是找到合适的提法[28]．

为了找到高维情况下马瑟集的合适提法，我们引进最小测度的概念．记 $M$ 为一紧致连通 $C^\infty$ 流形，TM 是它的切丛．我们所感兴趣的一般是 $M$ 为 $n$-环面．$L$: TM×$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 $C^2$ 函数，称为拉格朗日量．为了得到马瑟集的存在性，对 $L$ 要求满足如下条件：

1．周期性．$L$ 关于 $t$ 为周期函数，

$$L(\xi,\ t+1)=L(\xi,\ t);\qquad\qquad \xi\in \mathrm{TM},\ t\in\mathbb{R}$$

2．正定性．在 TM 的每一根纤维上，即固定 $m\in M$，$L$ 关于切向量的 Hessian 矩阵具有正定性；

3．超线性增长性．

$$\lim_{\|\xi\|\to\infty}\frac{L(\xi,\ t)}{\|\xi\|}\to+\infty,\qquad\qquad \forall\xi\in \mathrm{TM},\ t\in\mathbb{R}$$

这里‖*‖表示相应于 $M$ 上黎曼度量的模；

4．完全性．由变分问题

$$\delta\int L(d\gamma(t),\ t)dt=0$$

决定的欧拉-拉格朗日向量场

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}=L_x$$

记为 $E_L$，由 $E_L$ 决定的任何一根积分曲线 $\gamma$：$\mathbb{R}\to M$ 都以 $\mathbb{R}$ 的全部作为其定义域．

由于 $L$ 关于 $t$ 有 1 周期性，我们可以在 $TM\times(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ 上引进一个与时间无关的向量场 $\widetilde{E}_L$

$$\widetilde{E}_L(\xi,\theta)=\left(E_L(\xi,t),\ \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\quad(\theta\equiv t,\ \mathrm{mod}\,1).$$

根据里斯(F. Riesz)表现定理，一个紧致度量空间 $X$ 上的所有波莱尔概率测度构成的集合是 $X$ 上的连续函数空间 $C(X)$ 的对偶空间 $C^*(X)$ 的一个子集. 它关于弱 * 拓扑显然是紧致的，可度量化的. 将这种拓扑限制到 Borel 测度集上经常称为**不明确拓扑**(vague topology).

记 $P=TM\times(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$，$P^*=P\cup\{\infty\}$是 $P$ 的一点紧致化. 可以将欧拉-拉格朗日流 $\Phi_L$ 延拓至 $P^*$，保持 $\infty$ 点不动. 用 $\mathfrak{M}_L$ 表示 $P^*$ 上的 $\Phi_L$——不变概率测度集合.

当然，对拉格朗日流而言，在 $P^*$ 上肯定有不变概率测度，但是如果此测度的支集仅在无限远点，这种测度是我们所不感兴趣的. 为了得到非平凡的测度，考虑 $\nu_n$ 是流 $\Phi_L$ 在时间长度为 $n$ 内的轨道. 取 $\mu_n$ 为在其上平均分布的概率测度. 显然

$$\|\Phi_{t^*}\mu_n-\mu_n\|\leqslant\frac{2t}{n}.$$

由于概率测度空间是弱*紧致的，可以取到 $\mu$ 是 $\mu_n$ 的聚点. 对 $X$ 上的任何连续函数 $u$ 以及 $t\in\mathbb{R}$，任何 $n_0$，$\varepsilon>0$，总存在 $n\geqslant n_0$，使

$$\left|\int u\circ\Phi_s\,d\mu-\int u\circ\Phi_s\,d\mu_n\right|<\varepsilon.\qquad s=0,\ t$$

因此，

$$\begin{aligned}\left|\int u\circ\Phi_t\,d\mu-\int u\,d\mu\right|&\leqslant\left|\int u\circ\Phi_t d\mu_n-\int u\circ d\mu_n\right|+2\varepsilon\\&\leqslant 2\varepsilon+\|u\|\,\|\Phi_{t^*}\mu_n-\mu_n\|\\&\leqslant 2\varepsilon+2t\,\frac{\|u\|}{n}.\end{aligned}$$

因为 $n_0$ 可以任意大，而 $\varepsilon$ 可以任意小，所以

$$\left|\int u\circ\Phi_t d\mu-u d\,\mu\right|=0,$$

即 $\mu$ 是 $\Phi$ 不变的．这说明 $\mu_n$ 的任何聚点总是 $\Phi$ 不变的．

定义拉格朗日量在测度 $\mu$ 上的平均作用量为

$$A(\mu)=\int L\,d\mu,$$

取 $A(\infty)=\infty$．可以证明存在 $\mu\in\mathfrak{M}_L$，使得 $A(\mu)<\infty$．由于对 $L$ 有以上四条要求，我们知道 $A(\mu)$ 总有下界．

在 $\Phi_L$ 不变测度上还可以定义旋转向量 $\rho(\mu)$．记 $M$ 上 $C^\infty$1-形式为 $\lambda$，可以认为 $\lambda$ 是 $TM\to\mathbb{R}$ 的映射，在每一根纤维上线性．如果 $\mu$ 是一个波莱尔概率测度，$\int L d\mu<\infty$，那么 $\lambda\in L^1(\mu)$．如果 $\lambda$ 是正合的，$\mu$ 是 $\Phi$ 不变的，那么 $\int\lambda\,d\mu=0$．所以，如果 $\mu$ 是 $\Phi$ 不变的，存在 $\rho(\mu)\in H_1(M,\mathbb{R})$，使得关系

$$\langle[\lambda],\ \rho(\mu)\rangle=\int\lambda\,d\mu$$

对 $M$ 上任何闭 1 形式均成立，其中 $[\lambda]$ 表示 $\lambda$ 所在的德·拉姆(G.-W. de Rham)上同调类，而 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 则表示上同调和同调之间的正则对．因此，对每一个 $\mu\in\mathfrak{M}_L$ 并且 $A(\mu)<\infty$，我们可以连带一个 $\rho(\mu)\in H_1(M,\mathbb{R})$，它被称为 $\mu$ 的**旋转向量**．反过来，对于 $h\in H_1(M,\mathbb{R})$，总存在 $\mu\in\mathfrak{M}_L$，使得 $A(\mu)<\infty$ 而 $\rho(\mu)=h$．

对 $c\in H^1(M,\mathbb{R})$，定义

$$A_C(\mu)=A(\mu)-\langle C,\ \rho(\mu)\rangle=\int(L-\lambda)d\mu,$$

其中 $\lambda$ 是 $M$ 上的闭 1 形式，$[\lambda]=c_0$ 如果 $A(\mu)=\infty$，取 $A_C(\mu)=\infty$．考虑 $L-\lambda$．显然，$L-\lambda$ 满足 $L$ 所具有的四个条件，而且 $L-\lambda$ 的拉格朗日方程与 $L$ 的拉格朗日方程一样，因此 $A_C$ 下半连续，故而取得最小值 $-\alpha(c)$．容易验证，集合 $\{(c,z),\ z\geqslant\alpha(c)\}$ 是 $H^1(M,\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ 上的凸子集．在此意义下，$\alpha(c)$ 是 $H^1(M,\mathbb{R})$ 的凸函数．既然如此，取 $\alpha^*$: $H_1(M,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$，表示在凸变换意义下 $\alpha$ 的共轭函数

$$-\alpha^*(h)=\min_c\{\alpha(c)-\langle c,\ h\rangle,$$

其中 $c$ 取遍 $H^1(M, \mathbb{R})$. 显然, $\alpha^*$ 的取值范围为 $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. 可以证明, $\alpha^*$ 只在 $\mathbb{R}$ 上取值. 根据定义, 如果 $\mu\in\mathfrak{M}_L$, $A(\mu)<\infty$, 那么 $\alpha^*(\rho(\mu))\leqslant A(\mu)$, 即 $\alpha^*(h)$ 是旋转向量为 $h$ 的不变概率测量作用量的下界.

按照如上定义的共轭关系, 既然 $\alpha$ 和 $\alpha^*$ 皆处处有限, 因而都具有超线性增长性.

令 $E=\{(\rho(\mu), z)\in H_1(M, \mathbb{R})\times\mathbb{R}; \mu\in\mathfrak{M}_L, A(\mu)\leqslant z\}$. 由于 $L$ 下有界, $E$ 到 $\mathbb{R}$ 上的投影有相同的下界. 显然 $E$ 是凸集. 可以证明 $\mu\rightarrow\rho(\mu)$ 在 $\{\mu\in\mathfrak{M}_L; A(\mu)\leqslant c\}$ 上是连续函数. 由于 $\mathfrak{M}_L$ 是紧的, $A$ 下半连续, $E$ 一定是某个 $H_1(M, \mathbb{R})\rightarrow\mathbb{R}$ 凸函数的上境图(epigraph), 即 $E=\{(c, z); c\in H^1(M, \mathbb{R}), z\geqslant\beta(c)\}$. 根据 $\alpha^*$ 的定义, 可知 $\beta=\alpha^*$, $\alpha=\beta^*$. 这就得到马瑟的最小不变测度存在性定理:

**定理3**(J. 马瑟, 1991) 函数 $\alpha: H^1(M,\mathbb{R})\rightarrow\mathbb{R}$ 和 $\beta: H_1(M,\mathbb{R})\rightarrow\mathbb{R}$ 是互为共轭的函数, 都具有超线性增长性. 对于 $h\in H_1(M,\mathbb{R})$, 有

$$\beta(h)=\min\{A(\mu): \mu\in\mathfrak{M}_L, \rho(\mu)=h\};$$

对 $c\in H^1(M, \mathbb{R})$, 有

$$-\alpha(c)=\min\{A_c(\mu): \mu\in\mathfrak{M}_L\}.$$

注意到 $E$ 是闭的, 所以上面两个最小值均可取到. 对 $\mu\in\mathfrak{M}_L$, 使得上述任一关系成立者被称为**最小不变测度**.

对动力系统理论最重要的不变概率测度是遍历测度. 所谓**遍历测度**是指每个波莱尔不变集只可以是全测集或零测集. 作为凸集, $\mathfrak{M}_L$ 的极点是遍历测度. 由于 $\beta$ 具有超线性增长性, 它的上境图具有无穷多极点. 让 $(h, \beta(h))$ 表示 $\beta$ 的一个极点. 对于所有 $\mu\in\mathfrak{M}_L$, 使得 $\rho(\mu)=h$, $A(\mu)=\beta(h)$ 构成的集合的极点因而总是遍历测度. 换句话说如果 $(h, \beta(h))$ 是 $\beta$ 的上境图的一个极点, 则至少存在一个遍历测度具有旋转向量 $h$. 对于这样的遍历测度, 伯克霍夫(G. D. Birkhoff)遍历定理说, $\Phi$ 的 $\mu$ 几乎所有轨道有

旋转向量 $h$:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\lambda(\gamma(t))dt=\langle[\lambda],h\rangle$$

对 $M$ 上的每一个闭 1 形式成立.

定理 3 只是证明了对于某个旋转向量 $h\in H_1(M,\mathbb{R})$ 存在一个最小不变测度,然而,这一不变测度与拉格朗日方程定义的轨道有什么关系呢?为此,我们定义沿某一轨道的作用量. 记 $\widetilde{M}$ 是 $M$ 的覆盖空间, $[a,b]$是有界的区间, $\gamma$: $[a,b]\to\widetilde{M}$ 是绝对连续曲线. 定义作用量为

$$A(\gamma)=\int_a^b L(d\pi\gamma(t),t)dt,$$

其中 $\pi$ 是 $\widetilde{M}\to M$ 的投影. 由于 $\gamma$ 绝对连续, $d\gamma$ 几乎处处存在,关于 $t$ 可测,由外尔斯特拉斯定理,拉格朗日方程定义的轨道在局部上是极小化子. 给定两端点 $x_a$、$x_b\in\widetilde{M}$, 若存在绝对连续函数 $\gamma_0$: $[a,b]\to\widetilde{M}$, 使得 $\gamma(a)=x_a$、$\gamma(b)=x_b$, 并使得 $A(\gamma_0)=\min A(\gamma)$ 者, 被称为"固定端点的极小化子." 一条关于 $t$ 定义在整个 $\mathbb{R}$ 上的曲线 $\gamma$: $\mathbb{R}\to\widetilde{M}$ 被称为极小化子, 如果对任意有限段而言它也极小化相应固定端点的作用量. 为方便起见, 我们也称在扩张的切丛 $TM\times\mathbb{R}$ 上的轨道$(d\zeta(t),t)$为极小化子. 最后,一个在 $M$ 或 $P$ 上的曲线称为极小化子当且仅当它的提升在 $\widetilde{M}$ 或 $TM\times(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$上是极小化子.

设 $\zeta$: $\mathbb{R}\to M$ 是 $C^1$ 曲线, 取 $\gamma(t)=(d\zeta(t),t\bmod 1)$. 设 $\mu$ 是 $P^*$ 上的波莱尔概率测度,如果存在一个闭区间序列$[a_i,b_i]$, 并且 $b_i-a_i$ 趋于无穷$(i=1,2,\cdots)$, 使得 $\mu_i$ 在不确定拓扑意义下趋于 $\mu$($\mu_i$ 是沿 $\gamma|[a_i,b_i]$均匀平分的概率测度), 我们称 $\mu$ 是一个 $\zeta$ 的**极限测度**. 在此曲线上的极限测度集显然是一个紧集. 用这样的语言描述,我们有

**定理 4** 设 $\zeta$: $\mathbb{R}\to\widetilde{M}$ 是一个极小化子,并且

$$\lim_{b\to+\infty,\,a\to-\infty}\frac{\|\zeta(b)-\zeta(a)\|}{(b-a)}<\infty,$$

那么存在 $C\in H^1(M,\mathbb{R})$，使得 $\zeta$ 的每一个极限测度极小化 $A_C$.

考虑 $C\in H^1(M,\mathbb{R})$，我们用 $\mathfrak{M}_C$ 表示在 $\mathfrak{M}_L$ 上极小化 $A_C$ 的不变概率测度集. 显然，$\mathfrak{M}_C$ 是一个紧凸集. 用 $\mathrm{supp}\,\mathfrak{M}_C$ 表示 $\mathfrak{M}_C$ 的支集，若 $x\in \mathrm{supp}\,\mathfrak{M}_C$，对 $x$ 的任一邻域 $O_x$ 总存在 $\mu\in\mathfrak{M}_C$，使得 $\mu(O_x)>0$.

**定理 5** 对任何 $C\in H^1(M,\mathbb{R})$，拉格朗日流 $\Phi$ 在 $\mathrm{supp}\,\mathfrak{M}_C$ 内的每一条轨道都是 $\widetilde{M}$ 上的极小化子.

关于 $\mathrm{supp}\,\mathfrak{M}_C$ 的性质，有如下定理：

**定理 6** $\mathrm{supp}\,\mathfrak{M}_C$ 是紧集. $\pi$: $\mathrm{supp}\mathfrak{M}_C\to M\times(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ 是内射. 它的逆具有李普希茨性质，即存在常数 $C$，使得对任何 $x$、$y\in\pi(\mathrm{supp}\,\mathfrak{M}_C)$，总有

$$\mathrm{dist}\{\pi^{-1}(x),\ \pi^{-1}(y)\}\leqslant C\,\mathrm{dist}\{x,\ y\}.$$

## §15 二自由度系统中 KAM 环面附近的运动图象

两个自由度哈密顿系统的运动与多自由度系统有很大的差别. 对两个自由度系统而言(非自治情况应列为两个半自由度)，由于系统有一个能量积分，所以相空间可以分层为一族等能量面. 等能量面上的二维 KAM 环面将三维空间分为互不连通的两部分. 在外部的运动不可能到内部，反之亦然. 当系统近可积时，我们知道存在充分多的 KAM 环面，这些环面将整个等能量面分成充分多的互不连通的区域，每一区域内的运动只局限于本区域，互不影响. 为讨论方便起见，我们只研究庞加莱映射，即离散的时间. 这相应于保面积映射，KAM 环面表现为闭曲线.

在一个 KAM 环面附近，可以有动力行为大不一样的几种运动.

(i) 在此 KAM 环面附近的其他 KAM 环面，他们具有相同的伦型；

(ii) 椭圆周期轨道；

（iii）在椭圆周期轨道附近的 KAM 环面，图象表现为一些岛屿；

（iv）在不可微临界曲线上的拟周期运动；

（v）双曲型周期轨道；

（vi）康托环面；

（vii）同宿或异宿轨道，他们是类型为 v 和 vi 这样不变集的稳定与不稳定流形的横截交集；

（viii）在集合 $g$ 附近的一致双曲集(斯梅尔马蹄)；

（ix）随机层.

考虑一个二维保面积映射. KAM 环面是一个光滑嵌入的闭曲线，在此曲线上的运动是拟周期运动，其频率满足 Diophantine 条件. 由于 KAM 环面不是孤立的，我们只须考虑两个 KAM 闭曲线围成的一个区域就足够了. 这样的区域同构于一个二维辛圆环域. 因此问题简化为考虑圆环域上的保面积映射，这个映射保持两边界不变，Calabi 不变量为 0，近可积，扭转. 这样的映射 $f$ 具有如下形式的哈密顿量

$$H(x, y_1)=N_0(y_1)+h(x, y_1). \qquad (15.1)$$

覆盖映射 $\tilde{f}:\mathbb{R}\times[a, b]\to\mathbb{R}\times[a, b]$ 具有形式 $\tilde{f}(x, y)=(x_1, y_1)$，其中

$$\begin{cases} x_1=x+\omega_0(y_1)+\dfrac{\partial h}{\partial y_1}(x, y_1), \\ y=y_1+\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, y_1). \end{cases} \qquad (15.2)$$

$\omega_0(y_1)=N_0'(y_1)$ 是 $y_1$ 的严格单调增函数，$\omega_0'(y_1)>0$，$h:\mathbb{R}\times[a, b]\to\mathbb{R}$ 是 $x$ 的周期 1 函数，光滑，在边界 $\mathbb{R}\times\{a\}$ 和 $\mathbb{R}\times\{b\}$ 上为常数. $h$ 是小扰动. 如果 $h$ 不是解析函数，则假定 $h$ 及其足够高的导数充分小. 由于到目前为止用纯数学手段还不能完全描述所有的运动，我们有时将用一个具体的例子辅之以数值模拟来说明问题. 这个例子便是标准映射. 尽管这个系统和(15.2)不完全一

样，但是可以利用变量代换$(\phi, I)\to(x, y)$将KAM曲线拉直(在提升的覆盖空间内)而将我们的注意力仅仅局限于两个KAM不变曲线之间. 有关的变量还是以$(\phi, I)$为基本变量，相应的哈密顿量是

$$H(\phi, I_1)=\frac{1}{2}I_1^2+\frac{k}{4\pi^2}(-1-\cos 2\pi\phi), \tag{15.3}$$

相应的辛映射为

$$\begin{cases}\phi_1=\phi+I_1,\\ I_1=I-\frac{k}{2\pi}\sin 2\pi\phi.\end{cases} \tag{15.4}$$

此模型含有一个参数$k$，一般认为(15.2)所有可能的动力行为都可以通过适当地选择$k$而由模型(15.4)表现出来. 下面按本节开始的排列顺序来研究各种运动图象.

1. 环域中旋转一周的KAM曲线(简称为环绕KAM曲线). 我们在§7中证明的就是这种不变曲线的存在性. 这样的曲线不同伦于一点，即它不能连续收缩成一点. 根据以前的证明，当扰动充分小时这样的曲线占据了相空间的大部分，剩余部分的勒贝格测度是扰动的平方根量级. 这些不变曲线可以由其频率来参数化，相当于平移$\phi\to\phi+\omega(\mathrm{mod}\,1)$.

所有的围绕KAM曲线并不占据相空间的全部. 在每一个"有理曲线"附近存在着间隙，这样的区域由方程

$$\omega_0(y)=\frac{p}{q} \tag{15.5}$$

决定. $p$和$q$是互素的整数.

2. 周期点. 在由(15.5)决定的每一间隙处都存在着至少两个$q$周期轨道. 这由伯克霍夫不动点定理得到验证. 在通有情况下，一个周期轨是椭圆型的，而另一个则是双曲型的. 记周期点为$(x_i, y_i)$(其中$i=1, 2, \cdots, q$)，在$x$方向按顺序排列，映射(15.2)在这样的周期点上是置换：$(x_i, y_i)\to(x_{i+p(\mathrm{mod}q)}, y_{i+p(\mathrm{mod}q)})$.

在椭圆型不动点附近可以求伯克霍夫规范型. 如果用复坐标

$z=x+iy$，在不动点附近映射 $f: z\to z_1$ 有如下形式

$$z_1=Az+O(|z|^2). \tag{15.6}$$

$A$ 的特征值 $\lambda$ 的模为 1，$|\lambda|=1$．如果 $\lambda$ 不满足到 4 阶的共振条件，即 $\lambda^\nu\neq 1$，$\nu=1, 2, 3, 4$，我们可以找到保面积变换 $z\to w$，使得在 $w$ 坐标下映射 $f$ 为[51]

$$w_1=\lambda\exp(i\nu w\bar{w})w+O(|w|^4).$$

再取新的作用-角变量坐标，$r=\frac{1}{2}|w|^2$，$\varphi=\arg w$，我们便得到

$$\begin{cases} r_1=r+O(|r|^4), \\ \varphi_1=\varphi+B(r)+O(|r|^3). \end{cases}$$

如果 $r$ 充分小，即在不动点附近，我们可以应用 KAM 定理得到围绕此不动点的不变曲线，所以我们可以研究：

3．岛屿与 KAM 集合的层次．由上所述，在通有情况下，椭圆型周期点被不变曲线所包围．这些KAM不变圈与上面提到的KAM不变圈有不同的伦型，这些不变圈可以连续收缩到一点．这些圈实际上是一个 KAM 不变圈链，在这些不变圈上的运动是拟周期而被 $q$ 周期调谐．这是前面所列举的情况(iii)．这样一个由不变圈包围的区域，一般称为岛屿．在通有情况下，椭圆型不动点附近总是有这种岛屿，在共振层或者在混沌海中(见图 3-1，图 3-2)．在由这样的KAM 不变圈所包围的区域内，还可以具有更深一层但相似

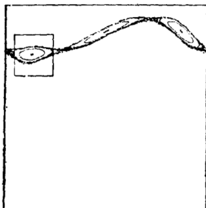


图 3-1



图 3-2

的结构. 如此可以无穷下去，形成一种自相似结构. 这是具有两个自由度的哈密顿系统的典型图象.

现在我们来看双曲型周期点和同宿轨. 图 3-1 表明一个双曲型周期轨与椭圆轨同时存在. 研究 $f$ 在周期轨 $\{z_0, z_1, \cdots, z_{q-1}\}$ 附近的情况，可以通过研究 $f^q$ 在其中一个不动点附近的情况来实现. 因为 $f^q$ 是双曲型，所以(15.6)式中 $A$ 的特征值 $\lambda$、$\lambda^{-1}$ 必然满足关系式 $|\lambda|>1$. 在不动点附近可以选择曲线坐标系(不一定是辛坐标)，使得映射在此坐标下是 $(X_1, X_2)\mapsto\left(\Lambda X_1, \dfrac{1}{\Lambda}X_2\right)$，其中 $\Lambda=\lambda+C(X_1, X_2)^m$, $C\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{Z}_+$. 方程 $X_i=0$ 决定了两条光滑曲线，稳定流形 $W^s(z_0)$ 和不稳定流形 $W^u(z_0)$. $f^k(W^{s(u)}(z_0))$ 是 $z_k$ 的稳定与不稳定流形 $(0\leqslant k\leqslant q-1)$. 若 $z\in W^s(z_0)$, $z\neq z_0$, 则 $f^{kq}(z)\mapsto z_0\ (k\to\infty)$; 当 $z\in W^u(z_0)$, 则 $f^{kq}(z)\mapsto z_0(k\to-\infty)$. 流形 $W^{s,u}(z_k)$ 经常称为**分界线**.

一个双曲周期点的分界线会发生相交现象，产生同宿或异宿轨道. 如果 $z\in W^s(z_k)\cap W^u(z_k)$，当 $k\to\pm\infty$ 时 $f^{kq}(z)\to z_k$，这称为同宿轨。如果 $z\in W^s(z_k)\cap W^u(z_j)(j\neq k, \bmod q)$, $f^{kq}(z)$ 构成异宿轨($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$). 这种轨道是随机现象的一个重要组成部分. 例如对标准映射(15.4)，取 $k=1.5$，双曲型不动点是 $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)=\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$. 相应的同宿相交可见图 3-4. 它们形成一个错综复杂的网. 一个同宿轨的存在意味着无穷多这样的同宿轨. 由横截相交产生的同宿轨引起的另一现象是紧康托不变集，具有零勒贝格测度，其中每点出发的轨道都具有双曲结构. 产生这种现象的机制是所谓斯梅尔马蹄. 在这个不变集上的运动拓扑共轭于所谓 Markov 链而且具有正的拓扑熵. 由于这个集合的勒贝格测度为 0，所以就数值计算而言是不可见的。

到此我们已研究了共振区内双曲周期轨以及它们的分界线. 现在我们来看在多大程度上围绕圆环的 KAM 不变曲线能够逼近

这些周期轨和分界线占据的区域. 为此要利用著名的伯克霍夫定理.

**定理1**(伯克霍夫) 设 $f: A\mapsto A$ 保一个具有正密度的测度, $U\subset A$ 是一个满足如下条件的子集;

(i) $U$ 在 $A$ 中的闭包紧;

(ii) $U$ 微分同胚于 $\mathbb{T}^1\times\mathbb{R}$;

(iii) 存在 $\delta>0$ 使得 $\mathbb{T}^1\times[0,\delta]\subset U$;

(iv) $U$ 是它的闭包的内部;

(v) $U$ 关于 $f$ 不变, 即 $f(U)=U$,

则 $U$ 在 $A$ 中的边界 $\bar{U}\backslash U$ 是一个李普希茨函数 $\phi: \mathbb{T}'\to R_+$ 的图.

应用伯克霍夫的这一定理, 可以得出这样的结论: 每一个环绕 KAM 不变曲线都是一光滑函数的图.

考虑 (15.2) 的所有位于共振区 (15.5) 中双曲轨道以下的环绕 KAM 曲线. 取由所有这些曲线作为上边界的开集之并, 我们得到开集 $U$ 满足定理(2.1)的条件. 由此可以得到由共振关系(15.5)确定的间隙的上 KAM 边界曲线 $\Gamma_+^{\mathrm{KAM}}$; 类似地, 我们也得到下 KAM 边界曲线 $\Gamma_-^{\mathrm{KAM}}$. 事实上, 在一般情况下还存在第三个 KAM 边界曲线(或曲线链), 称为内部边界曲线 $\Gamma_0^{\mathrm{KAM}}$. 如将以上的论证应用到椭圆型周期轨附近的可收缩 KAM 不变曲线上, $\Gamma_0^{\mathrm{KAM}}$ 的存在性是明显的。此内部 KAM 边界曲线有若干部分, 其数目是椭圆型轨道数乘以 $q$. 这些曲线是临界曲线, 不是 KAM 不变曲线, 因为后者在其两侧附近还有 KAM 不变曲线. 根据伯克霍夫的这一定理, $\Gamma_{\pm,0}^{\mathrm{KAM}}$ 都是李普希茨的. 现在考虑间隙以上的所有不变曲线. 和以上的论证一样, 存在上边界曲线 $\Gamma_+$、下边界曲线 $\Gamma_-$ 以及中间边界曲线 $\Gamma_0$. 一个自然的猜测是在通有情况下 $\Gamma_\alpha^{\mathrm{KAM}}=\Gamma_\alpha$, $\alpha=\pm, 0$, 但在个别情况下这些曲线可以不相同. 由这三条曲线圈出的区域叫做"共振间隙中的不稳定带". 一个典型的不稳定带在图 3-3 中是可见的.

数值结果显示在共振间隙中不稳定带内有孔, 例如这些是一

些椭圆型周期点为中心的岛屿.因此集合$\bigcup_{j=0}^{q-1}(W^s(z_j)\cup W^u(z_j))$的闭包($0\leqslant j\leqslant q-1$)并不充满不稳定带. 我们称这个闭包为双曲型周期轨 $\gamma=\{z_j, 0\leqslant j\leqslant q-1\}$生成的随机层. 有可能在接近共振关系(15.5)$\left(\text{即}\left|\frac{p_1}{q_1}-\frac{p}{q}\right|\text{充分小,}\ p_1\text{与}q_1\text{也互素}\right)$的共振间隙中由

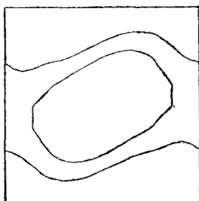
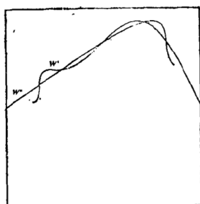


图 3-3

不同的双曲轨道产生出不同的随机层. 在典型的情况下, 在每一不稳定区内存在一个主要的随机层, 同时共存着大量的较小随机层.

一个典型的随机层看上去像一个非常复杂的闭集, 它有无穷多的孔. 由图 3-1, 图 3-2, 图 3-7, 图 3-8可见这些随机层的图象.

为探讨随机层的构造, 我们考虑标准映射(15.4), (参数 $k$ 取为 1.5) 不动点$\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)=\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$处的随机层. 这时, 此映射可以看成 $\mathbb{T}^2$ 到自身的映射. 在图 3-4(i)～(iii)中作 $\mathbb{T}^2$ 的展开, 一个正方形$\left\{(\phi,\ I):\ -\frac{1}{2}\leqslant\phi\leqslant\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\leqslant I\leqslant\frac{1}{2}\right\}$. 此不动点$\gamma$由边缘上的两点代表. 为了得到分界线 $W^{s,u}(\gamma)$的图象, 我们运用下列方法. 首先, 在$\gamma$附近用泰勒展开来计算 $W^s(\gamma)$和 $W^u(\gamma)$最接近$\gamma$的一段, 这可以有很高的精度; 然后, 再利用映射的复合迭代来逐次延伸. 图 3-4(i)～(iii) 是计算出的图象. 图 3-4(i)表示了不太长的一段 $W^s(\gamma)$ 与 $W^u(\gamma)$, 横截同宿点是显而易见的. 更长的一段见图 3-4(ii). 而"无限长"的情况见图 3-4(iii). 一个横截同宿相交引起了无穷多次横截同宿相交. 这样的结果是这些分离线产生了"混沌海", 因为此刻没有环绕的不变曲线. 对于较



(i)


(ii)

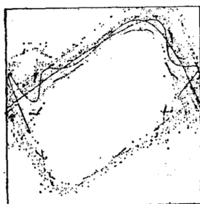

(iii)

图 3-4

小的 $k$ (这里 $k<k_c$) 这种大面积的混合是不发生的，因为存在着边界曲线，它限制了这种运动. 这种同宿横截相交导致了随机层的发生，因而是一种不可积性的重要特征.

对这种标准映射，有一点是有趣的. 即只要 $k>0$，都会有同宿横截现象. 所以，只要 $k\neq0$，这种系统看来都是不可积的.

到目前为止，随机层的结构还不清楚. 即使对于(15.4)这种标准映射，如下的问题也悬而未决. 中心问题是随机层的测度问题.

1. 随机层的勒贝格测度是否为正?

2. 随机层是否具有双曲结构?

3. 在随机层内的有序岛是否构成一稠密集? 此处的双曲结构是对 $f^t$ 不变集合 $\Lambda$ 定义的. 如果在 $T_\Lambda X$ 上存在有两个线性独立的截面, $v^s$ 和 $v^u$, 不一定连续, 满足下列性质:

(i) $v^s$、$v^u$ 关于 $f$ 不变;

(ii) 对于 $X$ 上的欧几里德距离 $|\cdot|$，存在定义在 $\Lambda$ 上的正可测函数 $\lambda$、$\varepsilon$、$c$ 和 $k$，$\lambda$ 与 $\varepsilon$ 关于 $f$ 不变，$\lambda<1-\varepsilon$，$C$ 和 $k$ 对所有

的 $t\in\mathbb{Z}$, $x\in\Lambda$ 满足不等式

$$C(f^t(x))\leqslant C(x)\exp\{\varepsilon(x)|t|\},$$
$$k(f^t(x))\geqslant k(x)\exp\{-\varepsilon(x)|t|\},$$

使得对所有 $t>0$, $x\in\Lambda$,

$$|Tf^tv^s(x)|\leqslant C(x)\lambda^t(x)|v^s(x)|,$$
$$|Tf^tv^u(x)|\geqslant C^{-1}(x)\lambda^{-t}(x)|v^u(x)|;$$

$v^s(x)$和 $v^u(x)$之间的夹角满足估计

$$\alpha(x)\geqslant K(x).$$

如果取 $\varepsilon=0$, 要求 $C(x)$、$\lambda(x)$和 $K(x)$与 $x$ 无关, 那么我们得到一致双曲结构的定义. 如果 $x$ 是 $f$ 的不动点, 上述双曲结构和双曲型不动点的含义吻合.

在 § 14 中我们已经研究了马瑟集的存在性. 在二维扭转映射中的马瑟集结构已经很清楚, 对任意 $\omega$ 存在一个康托环面, $f$ 在此环面上的运动是拟周期运动 $g^t_\omega$: $x\mapsto x+\omega t$ (其中 $t\in\mathbb{Z}$). 这个康托环面可以表示为一个定义在 $\mathbb{T}^1$ 上的弱保序映射 $S$ 的象, 不一定连续, 而 $f$ 在此象 $C$ 上的运动可以通过下列交换图表示:

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{T} & \xrightarrow{g^t_\omega} & \mathbb{T}\\ S\uparrow & & \uparrow S\\ \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}\end{array}$$

这种运动有时也称广义拟周期运动. 有很多迹象表明, 在一般情况下, 这种康托环面有一致双曲结构, 因此, 由一般的稳定-不稳定流形理论可以得出康托环面的稳定-不稳定流形. 这些流形的图象大约是这样: 设 $\mathscr{T}\subset X$ 是康托环面, 并有共轭映射 $\chi: C\to X$. 由于 $C$ 是 $\mathbb{T}$ 上的紧集, 它的补 $\mathbb{T}\backslash C$ 可以表示为一些互不相交的开集的并. 表示这些开区间为 $\Delta_j=(\alpha_j, \beta_j)$, 其中 $j\in\mathbb{Z}$, 记 $a_j=\chi(\alpha_j)$, $b_j=\chi(\beta_j)$. $W^s(\mathscr{T})=\{x\in X,\ f^t(x)\to\mathscr{T};\ t\to+\infty\}$就是连接 $a_j$ 和 $b_j$ 的一段光滑弧 $\sigma^s_j$ 的全体, 类似地也可以给出 $W^u(\mathscr{T})$ 的描述. 一种典型的 $\sigma^u_j$ 和 $\sigma^s_j$ 横截相交构成一种 8 字形.

如果康托环面具有一致双曲结构，R. S. MacKay 证明如上的开区间只有有限个[38]. 为简单起见，设只有一个. 这样很容易看出这些圈 $A_j$ 围成的区域面积是相等的，相当于映射每作用一次而通过 $\mathscr{T}$ 的面积，方向是从稳定流形指向不稳定流形. 相同的论证可以应用于 $B_j$. 用形象的话说，这像一个旋转门，一次只出入一个人. 这种机制说明了相空间中面积的输运现象. 如果 $\mathscr{T}$ 非常接近于不变圈，$\mathscr{T}$ 的间隙就很小，$A_j$、$B_j$ 的面积相应地就很小，因而通过 $\mathscr{T}$ 的"流"就很慢. 在极限的情况下 $\mathscr{T}$ 是一个不变圈，通过的流量自然是 0. 如果通过的流量非常小，$\mathscr{T}$ 一般称为具有半穿透性的障碍. 这样的障碍经常发生在岛屿边界附近，这就是为什么数值结果显示运动在那里逗留较长时间的原因.

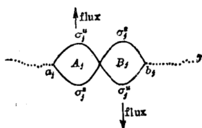



图 3-5

在一可积系统受扰动以后，由 KAM 理论，大部分不系曲线仍然保留下来. 但随着扰动的加大，越来越多的不变曲线遭到破坏. 同时，我们也知道康托环面总是存在的，它们有些是由 KAM 环面破裂转化而来. 探讨这种转换过程是非常有趣的. 如上面所提及 KAM 环面具有不可穿透性，而康托环面则是具有某种穿透性的障碍物. 如果没有环绕的 KAM 环面或临界不变曲线存在(只有康托环面)，就至少有一点的轨道可以在径向从内边界趋向外边界，而只要有一条不变曲线，在径向就不可能有全局输运性质.

作为例子，我们还是考虑标准映射(15.4). 让 $k$ 从小到大变化. 如果 $k=0$，这是可积系统，所有曲线 $y=\text{const}_1$ 都是不变曲线. 对正的但足够小的 $k$，足够多的运动仍然是拟周期运动. 如果增加 $k$，越来越多的 KAM 环面相继破裂，而成为康托环面. 数值结果表明，最稳定的不变曲线的旋转数 $\omega=\omega_g=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$，




图 3-6



图 3-7

称为"黄金曲线"，这是因为$\omega_g$的连分数表示是最好的，因此

$$\omega_g=(1+\omega_g)^{-1}, \tag{15.7}$$

$$\omega_g=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}.$$

即只需用"1"表示．根据数值结果，对标准映射(15.4)而言，$k$的"临界值"为

$$k_c\approx 0.97163540631\cdots. \tag{15.8}$$

这样的黄金曲线在$0\leqslant k<k_c$时存在，当$k>k_c$时变成康托环面，这时随机层全部连通成"混沌海"．如果$k=k_c$，这时只有一条环绕的不变曲线，最后的曲线，它具有"黄金分割率"频率$\omega_g\pmod 1$．很自然地，可以假设这种分支现象可以作为两个随机层互相溶合的模型．

## §16 多自由度哈密顿系统的阿诺尔德扩散

此处所谓多自由度，是指自由度数不低于3．在$n$维空间中，一个$(n-1)$维闭曲面才有可能把空间分为互不连通的两部分，例

如 $T^{n-1}$. 而比$(n-1)$维还要低的曲面是做不到这一点的. 在 $n$ 个自由度哈密顿系统$(n\geqslant 3)$中, KAM 环面只有 $n$ 维. 由于有能量积分, 所以系统的运动限制在$(2n-1)$维曲面上. 当 $n\geqslant 3$ 时, $n$ 维环面是不可能把$(2n-1)$维空间分隔成互不连通的两部分的. 因此, 即便存在有充分多的 KAM 环面, 在等能量面上的一点也可以跑得很远. 这里"很远"的意思是指相应的作用量变化可以很大. 注意 KAM 环面存在于近可积系统中, 而在 KAM 环面上任一点的轨道上相应的作用量变化是很小的. 如果 KAM 环面能够将空间分成为互不连通的两部分, 那么在 KAM 环面之间的运动而引起的作用量变化也必须很小(两个自由度哈密顿系统就是这样). 因此这种作用量变化可以很大的情况是多自由度系统所特有的, 比较令人惊讶的运动, 一般称之为**阿诺尔德扩散**.

现在人们相信阿诺尔德扩散过程与共振层内的低维不变环面和马瑟集的存在有很大关系. 在 §11 中我们研究了共振层内的低维不变环面. 设 KAM 形式的哈密顿量为 $H(p, q)=N(p)+P(p, q)$, $q\in\mathbb{T}^n$. 如果 $N$ 满足柯尔莫哥洛夫非退化条件, $\det(\mathrm{Hess}\,N)\neq 0$, 那么作用量空间到频率向量空间的映射是局部同胚. 对于$m$个共振关系$(m<n)$,

$$\langle k_i, \omega(p)\rangle=0. \qquad i=1, 2, \cdots, m \quad (16.1)$$

如果存在 $p=p_0$ 使上式成立, 在作用量空间 $p_0$ 的邻域内一定存在一经过 $p_0$ 的 $(n-m)$ 维曲面 $\Sigma_{n-m}$, 上面所有点都满足共振关系 (16.1). 让 $m=1, 2, \cdots, n-1$, 容易看出满足这种关系的集合在作用量空间中形成一稠密集合. 在$(n-m)$维曲面 $\Sigma_{n-m}$ 上, 绝大部分点都满足相对 Diophantine 条件. 当 $m=1$ 时, $N(p)$是 $p$ 的凸函数, $\omega_{n-1}$ 满足 Diophantine 条件, 本书第 2 章已经证明, 至少存在一个$(n-1)$维低维环面, 上面的拟周期频率是 $\omega_{n-m}$. 在一般情况下, 此低维环面是双曲型的[11]. 对任意 $1<m<n$, 若对系统加上一些非退化条件, 也已经证明至少存在一个$(n-m)$维低维环面. 需要指出的是, 对 $m=1$, $N$ 是凸的情况, 这种存在性不依赖

于扰动的具体形式，即 $|P|<\varepsilon$，而 $\varepsilon$ 与 $P$ 的具体形式无关．而对 $1<m<n$，即使对扰动加上一些非退化条件，扰动的上界也与扰动的形式有关．实际上，作者认为，对 $0<m<n$，在 $\Sigma_{n-m}$ 上存在充分接近全测的正勒贝格测度集 $L_{n-m}$．对 $p\in L_{n-m}$，相应的 $n$ 维环面破裂之后，至少存在着 $(m+1)$ 个 $n-m$ 不变环面．但是，双曲型的只有一个，其他是双曲-椭圆混合型以及一个椭圆型不变环面．常见于文献称之为"带须(whiskered)环面"的，就是指那个双曲型低维环面．

带须环面 $\mathscr{T}$ 的定义如下：存在两个光滑的内射浸入 $\Psi^{s,u}$: $T^k\times V^{s,u}\to X$，其中 $V^{s,u}\subset\mathbb{R}^{n-k}$ 是包含原点的开集，使得

(i) $\Psi^{s,u}(T^k\times V^{s,u})=W^{s,u}(\mathscr{T})$;

(ii) $\Psi^{s,u}|_{T^k\times\{0\}}=\chi$，一个决定 $\mathscr{T}$ 的嵌入；

(iii) 存在 $\varepsilon>0$，使得 $B_\varepsilon=\{x\in\mathbb{R}^{n-k};\ |x|<\varepsilon\}\subset V^{s,u}$，$\Psi^{s,u}(T^k\times B_\varepsilon)$ 是拉格朗日流形，并且

$$W^s(T)=\bigcup_{t>0}f^{-t}\Psi^s(\mathbb{T}^k\times B_\varepsilon),$$

$$W^u(T)=\bigcup_{t>0}f^t\Psi(\mathbb{T}^k\times B_\varepsilon).$$

这里的 $f_t$ 是指哈密顿流决定的单参数变换群．

这些低维不变环面的稳定与不稳定流形在共振层内延伸，各个不同的共振关系所对应的低维不变环面的稳定(不稳定)流形可以与不稳定(稳定)流形相交。记 $T_1$、$T_2$ 是两个低维不变环面，设 $x\in W^s(T_1)\cap W^u(T_2)$，根据 $W^{s,u}$ 的定义，$f^t(x)$ 对所有 $t$ 有定义．整个轨道 $\gamma=\mathscr{U}_tf^t(x)\in W^s(T_1)\cap W^u(T_2)$．这样的轨道称为**异宿轨道**．对于离散时间系统，如果稳定与不稳定流形在 $\gamma$ 处横截相交，称这样的轨道是**横截的**．而对于连续时间系统则需加上等能量面上横截相交这样的条件．

除去以上严格的共振关系以外，还有一些拟共振关系，即频率向量与整数不可公度，但也不满足 Diophantine 条件．对二维保面积映射，马瑟已经证明，具有如上特征的频率所对应的环面可以

被任意小的扰动所破坏. 在高维系统中，我们有理由相信这样的环面也可以被任意小的扰动所破坏. 在这种情况下，低维不变环面不可能存在. 但是，应用马瑟的理论，我们知道存在着相应的马瑟集. 这种马瑟集一般处于由严格共振关系而产生的共振层之间. 这种集合具有半同宿轨道[7]，因而可以和其他低维不变环面之间有一种连接[32].

共振区的结构与系统是否是二自由度或多自由度有极大的差别. 对于二自由度系统，这种间隙形如 $G_\alpha=\mathbb{T}^2\times\alpha$, $\alpha\subset\mathbb{R}$ 是开集，形成一组互不连通开区间的并. 而在多自由度系统中，这些共振区互相交叉，形成一个由无穷多相互连通的带状区域构成的稠密集. 这些区域的骨干，共振超平面

$$L_{m,m_0}=\{\omega\in\mathbb{R}^n,\ \langle m,\ \omega\rangle=m_0\}$$

构成所谓阿诺尔德网. 从共振区里的任意一点出发，可以在共振区内走到相空间中任一点的任意小邻域中. 这就导致如下的猜测：近可积多自由度哈密顿系统的一个典型情况是拓扑不稳定性. 在任一点的任一邻域中，通过这样的轨线，沿着这些轨线作用变量可以远离初始值，达到 1 的量级. 这就是所谓的“阿诺尔德扩散”. 迄今为止，要阐明阿诺尔德扩散的机制，给出明晰的图象，还十分困难. 不过，有一些描述看上去还是可以接受的. 如果具有 KAM 型的哈密顿量的主部具有柯尔莫哥洛夫非退化性，至少在局部范围内作用量空间和频率空间是一一对应的，因而我们在作用量空间内也可得到一张阿诺尔德网，有许多相互交叉的间隙，或称之为通道，其宽度随着 $m$ 趋于 $\infty$ 而趋于 0. 在每一个共振关系确定的通道内，作用量可以改变而到达两个或更多通道的交叉口，而后改变方向沿着另一条通道改变. 这种过程有点像在迷宫中的随机行走. 由于阿诺尔德网的稠密性和连通性，从任一点出发，轨道在经过充分长的时间以后，充分多次反复以上的过程，以至于作用量远远偏离初始值.

值得指出，利用变分方法在一些条件下人们已经证明了双曲

型不变环面之间的异宿轨道的存在性，不变集之间的连续的存在性，而利用遮盖引理(shadowing lemma)人们有理由预料在充分接近异宿轨道(连接)的点出发(不在异宿轨道或连接上)可以到达某一个低维不变环面或不变集附近，然后再沿着靠近另一异宿轨或连接的道路而到达另一不变环面或不变集附近，从而形成阿诺尔德扩散.

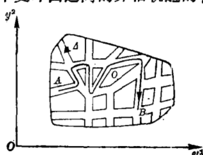



图 3-8

尽管阿诺尔德扩散的机制与图象还不十分清楚，但有一点已经很明确，即扩散的速度是十分缓慢的. N. Nehoroshev[Ne]在对哈密顿函数的主部加上一定的(但不很苛刻)条件后得到对于充分小的扰动，

$$|p(t)-p(0)|<\varepsilon^b \qquad \forall\ 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\exp(\varepsilon^{-a})$$

其中 $a$、$b$ 是正常数，依赖于主部 $N(p)$

# 参考文献


[1] V. I. Arnold, V. V. Kozlov and A. I. Neishtadt, *mathematical aspects of classical and celestial mechanics*, Dynamical Systems **3** (2nd Edition) Springer-Verlag 1993.

[2] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag 1978.

[3] V. I. Arnold, *Proof of A. N. Kolmogorov's theorem on the preservation of quasi-periodic motions under small perturbations of Hamiltonian*, Usp. Math. USSR, **18** (1963), 9～36.

[4] S. Aubry, *The twist map, the extended Frenkel-Kontorova model and the devil's staircase*, Physica **7**D(1983), 240～258.

[5] S. Aubry, and P. Y. Le Daeron, *The discrete Frenkel-Kontorova model and its extension I: exact results for the ground states*, Physica, **8**D(1984), 381～422.

[6] V. Bangert, *Mather Sets for twist maps and geodesics on tori*, Dynamics Repotrs, **1**(1988), 1～55.

[7] S. Bolotin, *Invariant sets of Hamiltonian systems and variational methods*, Proceedings of ICM'94, to appear, Birkhäuser.

[8] D. Berstein and A. Katok, *Birkhoff periodic orbits for small perturbations of Completely integrable Hamiltonian systems with convex Hamiltonian Invent*, Math., **88** (1987), 225～241.

[9] L. Chierchia, *On the stability problem for nearly integrable Hamiltonian systems, Progress in Uonlinear Differential Equations and their applications*, **21** (1994).

[10] L. Chierchia and G. Gallavotti *Drift and diffusion in phase space*, Ann. Poincaré Physique Theorique, **60** (1994), 1～144.

[11] Cheng C. -Q., *Birkhoff-Kolmogorov-Arnold-Moser tori in convex Hamiltonian systems*, ETH preprint (1994). to appear in Commun. Math. Phys. (1995).

[12] Cheng C. -Q. and Sun Y. -S. *Existence of invariant tori in three dimensional measure-preserving mappings*, Celestial Mechanics, **47** (1990), 275～292.

[13] Cheng C. -Q. and Sun Y. -S. *Existence of periodic invariant curves in 3-dimensional measure preserving mappings*, Celestial Mechanics, **47**(1990), 293～303.

[14] Cheng C. -Q. and Sun Y. -S. *Existence of KAM tori in degenerate Hamiltonian systems*, J. Differential Equations, **114** (1994), 288～335.

[15] J. Denzler, *Nonpersistence of breather families for the perturbed sine-Gordon equation*, Commun. Math. Phys. **158**(1993), 397—430.

[16] L. H. Eliasson, *Perturbations of stable invariant tori for Hamiltonian systems*, Ann. Scuola Norm. Supper. Pisa, Cl. Sci. IV. Ser, **15** (1988), 115～147.

[17] L. H. Eliasson, *Biasymptotic solutions of perturbed integrable Hamiltonian systems*, preprint (1994).

[18] J. Fröhlich, T. Spencer and C. E. Wayne *Localisation in disordered*, nonlinear dynamical Systems. J. Stat. Phys. **42** (1986), 247～274.

[19] S. M. Graff, *Oh the continuation of hyperbolic invariant tori for Hamiltonian systems*, J, Differential Equations, **15**(1974), 1～69.

[20] R. S. Hamilton, *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bull. AMS New Series, **7** (1982), 65～222.

[21] M. R. Herman, *Sur les courbes invariantes par les diffêmorphisma de lânneau*, Asterisque, **103～104**(1983).

[22] M. R. Herman, *Sur les courbes invariantes par les diffêmorphisma de lânnsau*, Asterisque, **144**(1986).

[23] M. R. Herman, *Stabilité topologique des systems dynamiques Conservatifs*. Col. Bras. Mat, **18** (1992).

[24] M. R. Herman, *Thêoreme des tores tranlatés et queslques applications a la stabilite topologique des systems conservatifs*, preprint.

[25] A. N. Kolmogorov, *On quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian*, Doklady Akad, Nauk, USSR, **98** (1954), 1～20.

[26] V. F Lazutkin, *KAM theory and semiclassical approximations to eigen functions*, Springer Verlag (1993).

[27] P. Lochak, *Canonical perturbation theory via simultaneous approximation*, Uspk. Mat. Nauk, **47** (1992), 59～140.

[28] J. N. Mather, *Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus*, Topology **21**(1982), 457～467.

[29] J. N. Mather, *A criterion for the non-existence of invariant circles*, Publ, IHES, **63**(1986), 153～214.

[30] J. N. Mather, *Destruction of invariant curves*, Ergod. Th. Dynam. Sys., **8*** (1988), 199～214.

[31] J. N. Mather, *Action minimising invariant measures for positive definite Lagrargian systems*, Math. Z., **207**(1991), 169～207.

[32] J. N. Mather, *Variational construction of orbits of twist diffeomorphisms*, J. AMS., **4**(1991), 207～263.

[33] R. S. MacKay *A renormalisation approach to invariant circles in area-preserving maps*, Physica, **7D**(1983), 283～300.

[34] R. S. Mac Kay, *Transport in 3D volume preserving flows*, J. Nonlinear Science, **4** (1994), 329～354.

[35] V. K. Melnikov, *A family of conditionally periodic solutions of a Hamiltonian systems*, Soviet Math. Doklady, **9** (1968), 882～885.

[36] I. Mezic and S. Wiggins, *On the integrability and pertarbation of 3-dimensional fluid-flow with symmetry*, J. Nonlinear Science, **4** (1994), 157～194.

[37] J. Moser, *On invariant curves of area preserving mappings of an annulus Nachr*, Akad. Wiss. Gött. Math-Phys., **K1** (1962), 1～20

[38] J. Moser, *A rapidly convergent iteration method and nonlinear. partial differential equations I and II*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **20**(1966), 499～535.

[39] J. Moser, *Convergent series expansions for quasi-periodic motions*, Math. Ann., **169**(1967), 136～176.

[40] J. Moser, *An unusual variational problem connected with Mather's theory for monotone twist mappings*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, **12**(1994), 81～89.

[41] J. Moser, *Smooth approximation of Mather sets of monotone twist*

*mappings*, ETH preprint (1994).

[42] I. C. Percival, *A variational principle for invariant tori of fixed frequency*, J. Phys. A **12C**(1979), L57～L60.

[43] I. C. Percival, *Variational principle for invariant tori and cantori*, Symp. Nonlinear Dynamics and Beam-Beam Interaction, Am. Inst. Phys. Conf. Proc., **55**(1980), 302～310.

[44] J. Pöschel, *Integrability of Hamiltonian system on Cantor sets* Commun. Pure. Appl. Math., **35** (1982), 653～695.

[45] J. Pöschel. *On elliptic lower dimensional tori in Hamiltonian systems*, Math. Z. (1989), 559～608.

[46] J. Pöschel, *Small divisors with spatial structures Commun*, Math. Phys., **127** (1990), 351～393.

[47] L. Pustylnikov, *A dynamical system with infinitely many dogrees of freedom and solution of He Frenkel-Kontorova problem Teoret*, Mat. Fizika, **68**(1986), 53～68.

[48] C. Robinson, *Generic properties of conservative systems Amer.*, J. Math., **92**(1970), 562～603, 897～906.

[49] H. Rüssmann, *On the existence of invariant curves of twist mappings of an annulus*, Lecthre Notes Math., **1007**(1983), 677～718.

[50] H. Rüssmann, *On twist Hamiltonians, talle on the Collogue International: Mecanique celeste et systemes Hamiltonian Marseille* (1990).

[51] C. L. Siegel and J. Moser, *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, 1972.

[52] D. Salamon and E. Zehnder, *KAM theory in Configuration Space*, Comment. Math. Helv, **64** (1989), 84～132.

[53] M. Vittot and J. Bellissard, *Invariant tori for an infinite lattice of coupled classical rotators*, Preprint CPT-Marseille (1985).

[54] C. E. Wayne, *Periodic and quasi-periodic solutions of nonlinear wave equations via KAM theory Commun*, Math. Phys., **127** (1990), 479～528.

[55] H. Whitney *Analytic extension of differentiable functions dofined in closed sets*, Trans. AMS, **36** (1934), 63～89.

[56] Z. H. Xia, *Existence of invariaht tori in volume preserving diffeomor-*

*phisms*, Ergod. Th. Dynam. Sys., **12**(1992), 621~631.

[57] J. C. Yoccoz, *Recent developments in dynamics*, Proceedings of ICM'94, to appear.

[58] J. C. Yoccoz, *Travaux de Herman sur les tores invariants*, Asterisque, **206** (1992), 311~345.

[59] E. Zehnder, *Generalized implicit function theorems with application to small divisor problems*, Commun, Pure. Appl. Math.. **28**(1975), 91—140, **29**(1976), 49~113.